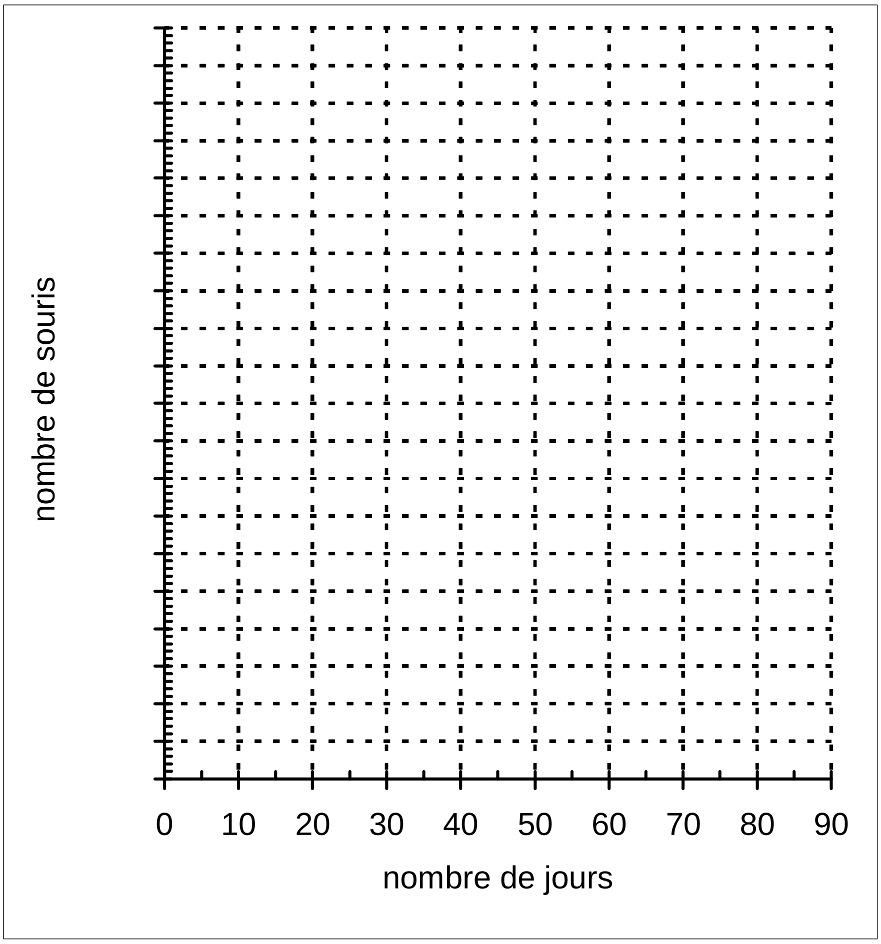
2. Les exponentielles

§ 2.1 Introduction et définitions

Exemple 1 :
On veut faire un élevage de souris. Pour cela on achète 10 souris grises, 20 souris blanches et 100 souris brunes. Les souris grises se reproduisent à une vitesse telle que leur population double tous les 10 jours. Chez les souris blanches, la population double tous les 15 jours alors que chez les souris brunes il y a, chaque 10 jours, 220 naissances et 20 décès.

Faire un tableau et tracer les trois courbes.



Exemple 2 :

La valeur future $C(n)$ d'un capital initial C_0 placé à un taux d'intérêt périodique I pour une durée de n années est donnée par la formule :

$$\boxed{C(n) = C_0(1+I)^n}$$

Donner la représentation graphique de l'évolution d'un capital épargne de 1000.- Fr. avec un taux d'intérêt 1,25%.

n	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	150
C												

Définition : Une application ***EXPONENTIELLE DE BASE a*** (notée E_a) est une application du type :

$$E_a : x \to y = a^x \qquad \text{de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^*$$

$$\text{avec } a \in \left]0;1\right[\cup \left]1;\infty\right[\qquad (a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$$

Remarque : ***e*** est un nombre dont la valeur est environ : **2,718282**

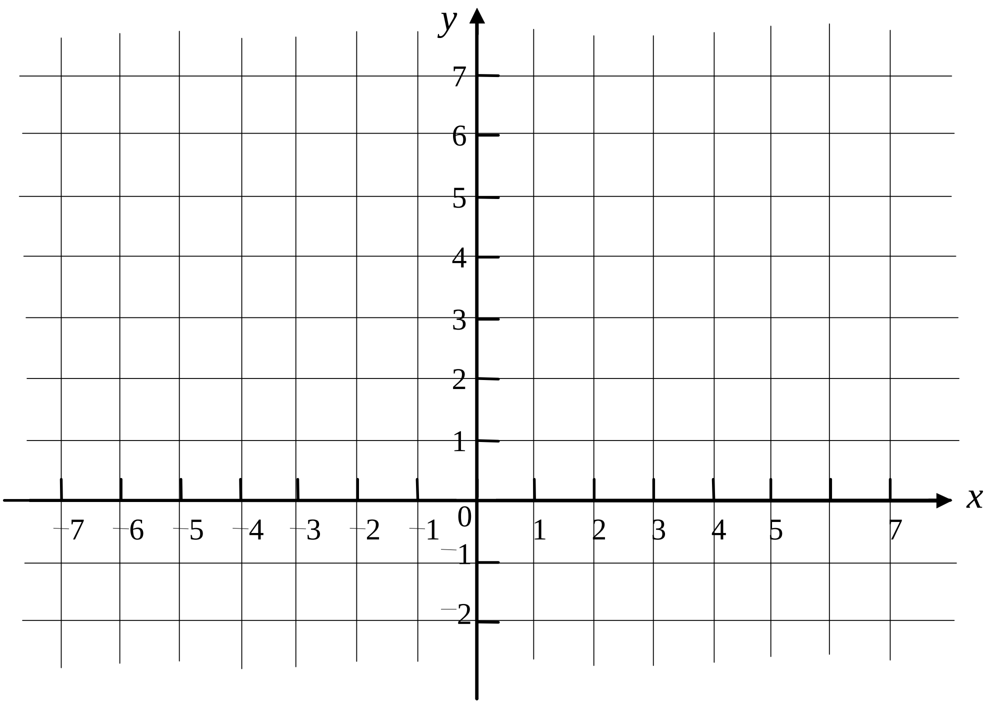
Exercice 1 : Calculer à l'aide de la calculatrice :

a) $3{,}4^{1{,}8} =$ b) $3{,}8^{31} =$ c) $e^3 =$

d) $12{,}73^{-6{,}7} =$ e) $e^{-4{,}5} =$ f) $e^1 =$

Exercice 2 : Représenter graphiquement les exponentielles suivantes :
(choisir $x =$ -4, -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3, 4)

a) E_2 b) $E_{0,5}$ c) E_e d) $E_{3,5}$

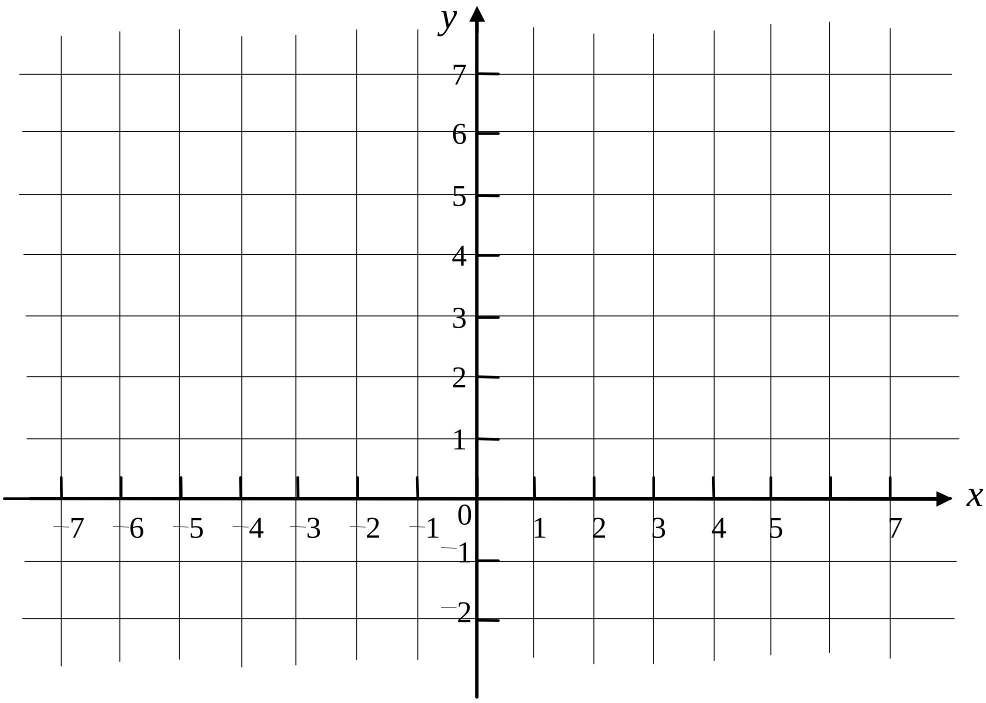


Propriétés :

1) Si $a > 1$ alors E_a est CROISSANTE
2) Si $0 < a < 1$ alors E_a est DECROISSANTE
3) $E_a(0) = 1$ et $E_a(1) = a$
4) E_a et $E_{1/a}$ sont SYMETRIQUES

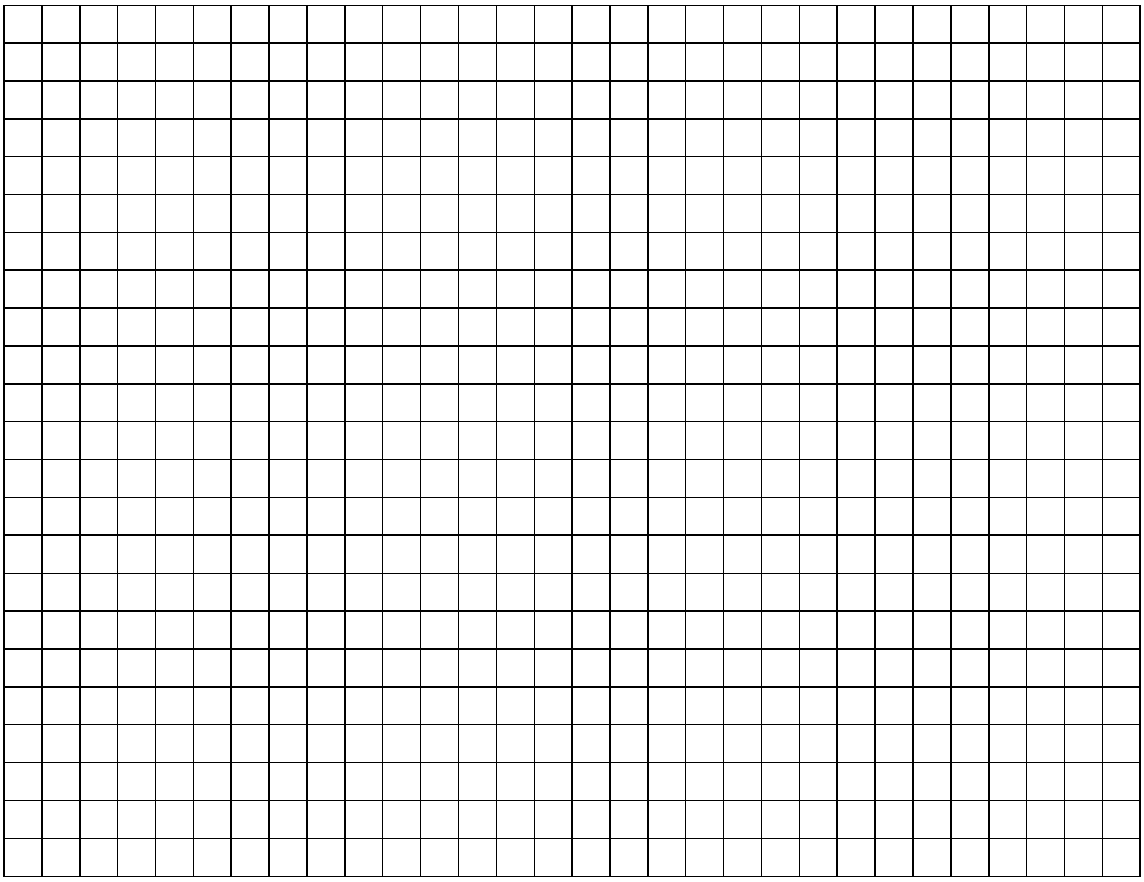
Exercice 3 : Représenter graphiquement les exponentielles suivantes :
(choisir $x =$ *-4, -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3, 4)*

a) E_5 b) $E_{0,2}$ c) $E_{0,25}$ d) E_4



<u>§ 2.2 Résolutions d'équations à l'aide de graphiques</u>

<u>Exemple</u> : résoudre $2^x = 4 - x$



Solution : …………………….

<u>Exercices 4</u> :
Résoudre graphiquement

a) $3^x = -x - 3$ c) $e^x = 5 - x$

b) $0,5^x - 2 = -x^2 + 1$ d) $2^x = 4 - x^2$

§2.3 Résolution algébrique d'équations exponentielles simples

Exemple :

Résoudre l'équation : $3^{5x-8} = 9^{x+2}$ « ***En exprimer les deux membres avec la même base*** »

Exercices 5 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $16^{3x+2} = 2^{5x+2}$ b) $81^{7x-4} = 27^{2x+1}$ c) $25^{3x-2} = 125^{x+2}$

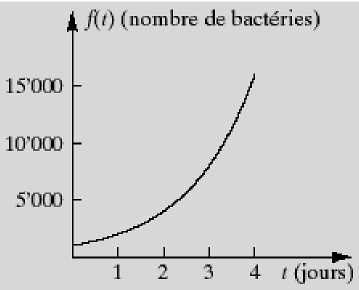
Exercices 6 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $121^{x-2} = 11^{3x+9}$ b) $625^{3x+4} = 125^{4x-2}$

§2.4 Applications

Croissance bactérienne



On peut utiliser les fonctions exponentielles pour décrire la croissance de certaines populations. Par exemple, supposons qu'on ait observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double chaque jour.
S'il y a au départ 1000 bactéries, nous obtenons le tableau suivant, où t est le temps en jours et $f(t)$ le nombre de bactéries au temps t.

t (temps en jours)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (nombre de bactéries)	1000	2000	4000	8000	16000

On voit que : $\boxed{f(t) = 1000 \cdot 2^t}$

Avec cette formule, nous pouvons prévoir le nombre de bactéries qu'il y a à un temps quelconque t.

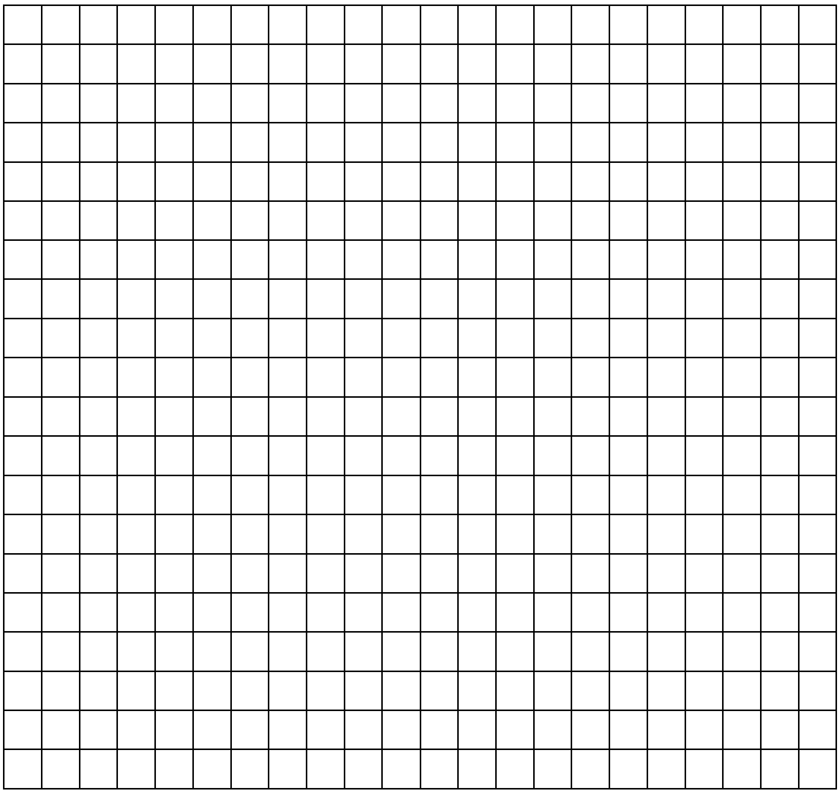
Exercice 7 :

a) Prévoir le nombre de bactéries après 1,5 jours.

b) Prévoir le nombre de bactéries après une semaine.

c) Prévoir le nombre de bactéries après un mois

Exercice 8 :
Donner la loi décrivant une croissance de population sachant qu'au départ il y a 10 individus et que chaque jour la population triple. Représenter graphiquement la situation.



Certaines quantités physiques décroissent de manière exponentielle. L'un des exemples les plus communs de décroissance exponentielle est la décomposition d'une substance radioactive, ou isotope.

<u>Application</u> : ***Décroissance radioactive***

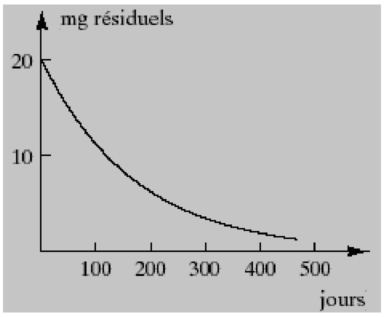
L'activité radioactive $A(t)$ d'un échantillon évolue dans le temps de la manière suivante :

$$\boxed{A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}}$$

avec : A_0 : l'activité initiale
k : la constante qui dépend de la nature de l'élément
t : le temps en années.

La **demi-vie** d'un isotope est le temps nécessaire pour que la moitié d'un échantillon donné se désintègre. La demi-vie est la principale caractéristique utilisée pour distinguer une substance radioactive d'une autre. L'isotope ^{210}Po du polonium a une demi-vie d'environ 140 jours, c'est-à-dire qu'étant donné une certaine quantité de ^{210}Po, la moitié se désintégrera en 140 jours. S'il y a au départ 20 milligrammes de ^{210}Po, le tableau suivant indique les quantités résiduelles après différents intervalles de temps.

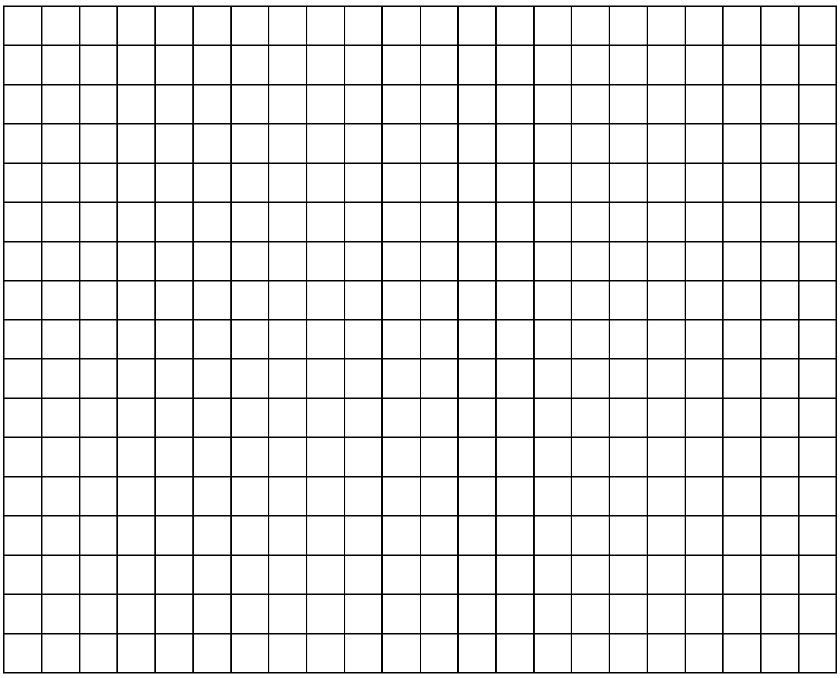
temps en jours	0	140	280	420	560
mg résiduels	20	10	5	2,5	1,25



D'autres substances radioactives ont des demi-vies beaucoup plus longues. En particulier, les réacteurs nucléaires produisent l'isotope ^{239}Pu du plutonium, dont la demi-vie est d'environ 24'000 ans. C'est pour cette raison que le stockage des déchets radioactifs est un problème majeur de la société moderne.

<u>Exercice 9</u> :
Un échantillon radioactif a une activité initiale de 2'800 des/sec.
Sachant que la constante de cet échantillon vaut 0,06 :

a) Calculer son activité après 1 an, 2 ans, 10 ans, 20 ans et 50 ans.
b) Montrer, à l'aide d'un graphique, l'évolution de l'activité.



La croissance du capital

La valeur future C(n) d'un capital initial C_0 placé à un taux d'intérêt périodique I pour une durée de n périodes est donnée par la formule :

$$\boxed{C(n) = C_0(1+I)^n}$$

Cette équation met en relation quatre symboles :

$C(n)$: la valeur du capital futur en Fr.

C_0 : la valeur du capital initial en Fr.

I : le taux d'intérêt annuel donné en %, exprimé en valeur décimale.

n : la durée du placement en années.

La connaissance de trois de ces symboles nous permet de trouver le quatrième.

Remarques :

Une année bancaire se compose de **12** mois de **30** jours. Une année bancaire a donc **360** jours.

3 ans	devient dans la formule : ....
3 ans et 6 mois	devient dans la formule : ....
5 ans, 8 mois et 20 jours	devient dans la formule : ....
2%	devient dans la formule : ....
3,5%	devient dans la formule : ....
5 ¼ %	devient dans la formule : ....

Exemple 1 : (Le calcul de la valeur future)

Un placement de 1'000 Fr. à 10 % par année pendant une période de 5 ans. Nous obtenons directement de l'équation que :

Exemple 2 : (Le calcul de la valeur actuelle)

Pour connaître par exemple la valeur actuelle d'une somme de 1’610,51 Fr. payable dans cinq ans, sachant que le taux annuel est de 10%, il suffit de calculer:

Exemple 3 : (Le calcul du taux)
Pour connaître par exemple le taux capitalisé annuellement auquel il faut placer un montant de 1’000 Fr. pour épargner 610,51 Fr. en 5 ans nous calculons:

Exercice 10:
Représenter graphiquement l’évolution de la valeur future C(n) d'un capital initial $C_0 = 2500$ Fr placé à un taux d'intérêt périodique $I = 3{,}9\%$ en fonction de la durée n en années.

$$\boxed{C(n) = C_0 (1 + I)^n}$$

Exercice 11 :

1) On place 1'200 Fr. sur un compte épargne de 4,5 % par année pendant une période de 4 ans. Donner l'état du compte futur.

2) On veut connaître la valeur actuelle d'une somme de 3'200 Fr. payable dans six ans sachant que le taux annuel est de 5 %.

3) Donner le taux capitalisé annuellement auquel il faut placer un montant de 3'000 Fr. pour obtenir un bénéfice de 800 Fr. en 4 ans et 6 mois.

Exercice 12 :

1) On place 6000 Fr. à 3,5 % pendant 8 ans 6 mois et 20 jours. Quelle sera la valeur du capital à la fin du placement ?

2) Quelle somme faut-il placer à 1,5 % pendant 7 ans et 5 mois pour obtenir un capital de 21'450.- Fr. ?

3) On place 8350 Fr. à 3,5 % pendant 5 ans, 3 mois et 20 jours. Calculer ce que rapportera cette somme.

4) Une personne emprunte la somme de 8'500 Fr. et rembourse un montant de 12'350.- Fr. 15 mois plus tard. A quel taux a-t-elle emprunté cette somme ?

5) A quel taux faut-il placer un capital pour qu'il double en 15 ans ?

SOLUTIONS

Ex 1 : a) 9,05 b) $9{,}404.10^{17}$ c) 20,086 d) $3{,}96.10^{-8}$ e) 0,011 f) 2,718

Ex 2 & 3 : Tableau des valeurs :

x	2^x	$3{,}5^x$	e^x	$0{,}5^x$	5^x	$0{,}2^x$	$0{,}25^x$	4^x
-3	0,125	0,023	0,05	8	0,008	125	64	0,016
-2	0,25	0,082	0,135	4	0,04	25	16	0,063
-1	0,5	0,286	0,368	2	0,2	5	4	0,25
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3,5	2,718	0,5	5	0,2	0,25	4
2	4	12,25	7,389	0,25	25	0,04	0,063	16
3	8	42,875	20,09	0,125	125	0,008	0,016	64

Ex 4 :

a) $x \approx -3$

b) $x_1 \approx -1 \quad x_2 \approx 1{,}6$

c) $x \approx 1{,}3$

d) $x_1 \approx -1{,}9 \quad x_2 \approx 1{,}2$

Ex 5 :

a) $x = -\dfrac{6}{7}$; b) $x = \dfrac{19}{22}$; c) $x = \dfrac{10}{3}$

Ex 6 :

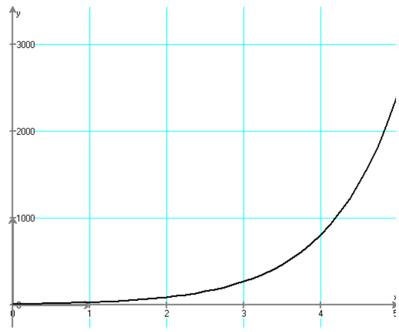
a) $x = -13$; b) pas de sol.

Ex 7 :

a) 2828 bactéries ; b) 128'000 bactéries ; c) $1{,}0727 \cdot 10^{12}$ bactéries

Ex 8 :

$f(t) = 10 \cdot 3^t$



Ex 9 :

t	0	1	2	10	20	50
A(t)	2800			1536,67		

Ex 11 : 1) 1431.- ; 2) 2387,90 ; 3) 5,4 %

Ex 12 : 1) 8053,30 ; 2) 19206,35 ; 3) 1672.- ; 4) 34,8 % ; 5) 4,7 %