

## 2. Les Nombres Relatifs

### § 2.1 Approche intuitive

#### Exemple 1 :

M. Untel, qui possède sur son compte en banque un solde de 15'000 Fr., désire acquérir une automobile d'une valeur de 17'000 Fr. Il doit donc emprunter une somme de 2000 Fr.



Avant son achat son solde était de : 15'000 Fr.  
Après son achat son solde est de : -2'000 Fr.

#### Exemple 2 :

3 décembre de l'an 2003. Température : 5°  
Prévision de la météo: « chute de 8° de la température »

4 décembre de l'an 2003. Température : -3°

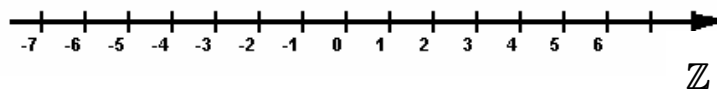


### § 2.2 L'ensemble $\mathbb{Z}$

#### Définition :

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \}$$

#### Droite des entiers relatifs :

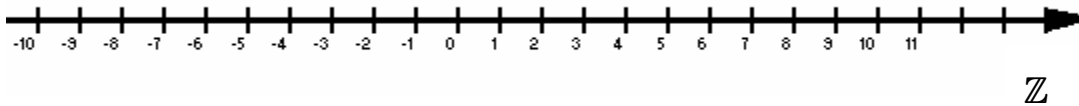


Remarque :  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

**§ 2.3 Déplacements sur la droite  $\mathbb{Z}$**

Une **addition** correspond à un déplacement vers la **droite**.

Une **soustraction** correspond à un déplacement vers la **gauche**.



Premier type de calcul :  $1 + 5 = ?$

*Se placer sur 1 et effectuer 5 "pas" vers la droite.*

*Le résultat sera **6***

Deuxième type de calcul :  $3 - 7 = ?$

*Se placer sur 3 et effectuer 7 "pas" vers la gauche.*

*Le résultat sera **-4***

Troisième type de calcul :  $-6 + 2 = ?$

*Se placer sur -6 et effectuer 2 "pas" vers la droite.*

*Le résultat sera **-4***

Quatrième type de calcul :  $-5 - 3 = ?$

*Se placer sur -5 et effectuer 3 "pas" vers la gauche.*

*Le résultat sera **-8***

**Exercice :**

a)  $8 - 5 =$

b)  $5 - 8 =$

c)  $2 - 5 =$

d)  $7 - 3 =$

e)  $3 - 7 =$

f)  $-3 + 5 =$

g)  $-4 - 6 =$

h)  $-5 + 5 =$

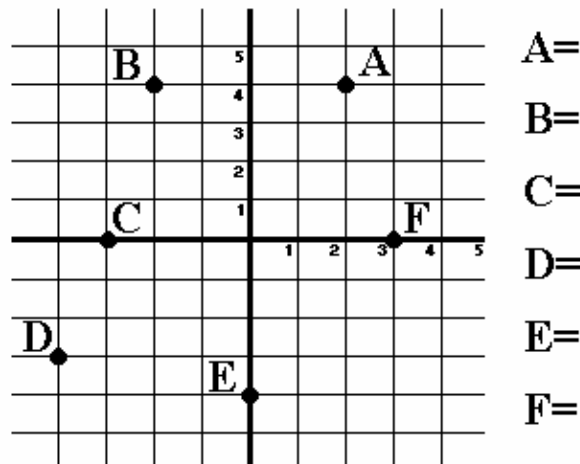
i)  $0 - 5 =$

§ 2.4 L'ensemble  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Un couple d'entiers relatifs est un objet de la forme  $\langle a ; b \rangle$   
 avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{Z}$   
 $a$  et  $b$  sont respectivement la première et la deuxième coordonnée  
 du couple  $\langle a ; b \rangle$

Remarque : L'ensemble de tous les couples possibles est noté  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Représentation :

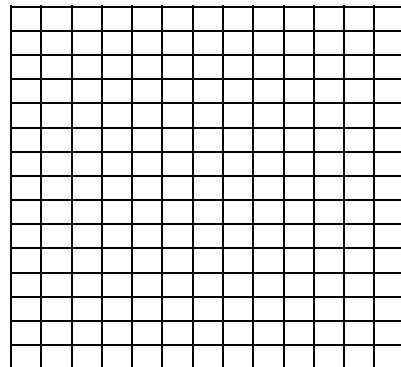
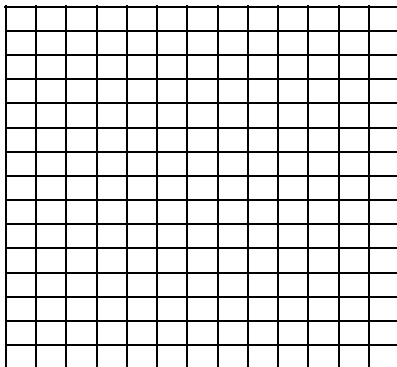


Exercice 1 :

Placer :  $A = \langle 2 ; 5 \rangle$        $B = \langle 2 ; -3 \rangle$        $C = \langle 0 ; 3 \rangle$   
 $D = \langle 5 ; 0 \rangle$        $E = \langle -2 ; -1 \rangle$        $F = \langle -3 ; 5 \rangle$

Exercice 2 :

Placer :  $A = \langle 0 ; 6 \rangle$        $B = \langle 3 ; 0 \rangle$        $C = \langle 0 ; -3 \rangle$   
 $D = \langle -4 ; 0 \rangle$        $E = \langle 0 ; 0 \rangle$



**§ 2.5 Ecriture simplifiée et première approche des additions et soustractions dans  $\mathbb{Z}$**

Règle : On peut transformer une suite d'additions et de soustractions dans  $\mathbb{Z}$  en une suite de déplacements "gauche, droite" sur la droite  $\mathbb{Z}$  en utilisant la règle suivante :

$+(+...)$	devient	$+ ...$
$+(- ...)$	devient	$- ...$
$-(+...)$	devient	$- ...$
$-(- ...)$	devient	$+... $

**en dernier on applique la règle du § 2.3**

*En d'autres mots, on parle **d'écriture simplifiée** où le + ne change pas le signe du nombre dans la parenthèse et le - signifie prendre l'opposé du nombre dans la parenthèse.*

**Exemples :**

$(+2) - (+5) =$	$(-2) + (-3) =$
$(+12) - (-3) + (-5) =$	$-(-2) =$
$-(-5) - (-5)$	$(-5) + (-0) =$
$-(-5) + (-5) - (-4) =$	$(-4) + (-3) + (-1) - (-4) =$

**Exercice :**

Calculer :

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| a) $(-14) + (+8) =$  | e) $(-12) + (-13) =$ |
| b) $(-16) + (-8) =$  | f) $15 - (+18) =$    |
| c) $(-23) + (+35) =$ | g) $(-17) - (-17) =$ |
| d) $(+13) + (+15) =$ | h) $0 + (-5) =$      |

## § 2.6 Notion de valeur absolue et une autre manière de voir l'addition dans $\mathbb{Z}$ :

Soit  $a$  un nombre entier relatif.

La valeur absolue de  $a$  est un nombre positif qui est en fait le nombre  $a$  sans son signe.

Notation : " valeur absolue de  $a$  " =  $|a|$

Exemples :

$|13| =$

$|-12| =$

$|0| =$

$|-127| =$

### Règle :

Pour **additionner** deux nombres relatifs :

- Si les nombres sont **de même signe**, on **garde le signe** et on les **additionne les valeurs absolues** :

*Exemples* :  $(-3) + (-4) = -7$        $(+6) + (+2) = +8$

- Si les nombres sont de **signes contraires**, on détermine le **signe** par celui qui est le **plus éloignée de l'origine (plus grande valeur absolue)** et on effectue la **différence** :

*Exemples* :  $(-3) + (+8) = +5$        $(-9) + (+5) = -4$

Pour **soustraire** deux nombres relatifs, on **transforme la soustraction** en une **addition** en considérant l'**opposé** du 2<sup>ème</sup> nombre.

*Exemples* :  $(-2) - (-8) = (-2) + (+8) = +6$        $(-5) - (+8) = (-5) + (-8) = -13$

N.B. L'usage de l'écriture simplifiée est fortement recommandé. (voir § 2.5)

### Exercice 1 :

a)  $(+3) - (+4) + (-5) =$

f)  $-(+7) + (+4) + (-5) + (-8) =$

b)  $(-1) + (-2) - (-5) - (-3) =$

g)  $(+3) - (-5) + (-5) - (-1) + (-2) =$

c)  $(-4) - (-4) + (-1) - (-2) =$

h)  $(+1) - (+1) + (-1) - (-1) + (-1) =$

d)  $-(+8) - (+3) - (-2) - (+3) =$

i)  $(+2) + (+4) - (-5) + (-1) + (-2) =$

e)  $-(-3) - (+2) + (-1) - (-1) =$

j)  $-(-1) - (+4) =$

**Exercice 2 :**

a)  $126 - (-6 + 64) =$

e)  $6 - (-7) - (9 - 4 + 1) =$

b)  $54 - (-17) + (-9) =$

f)  $26 - (-3 + 7) =$

c)  $7 + 9 + (20 - 5) =$

g)  $6 + (-9 - 18) =$

d)  $3 - 8 - (-8) + (-6) - (-5) =$

h)  $-2 + (14 - 54 + 3) - 5 =$

**§ 2.7 Multiplications et divisions dans  $\mathbb{Z}$**

Règle : La règle est la même pour la multiplication et la division.

On multiplie (divise) les valeurs absolues et le **signe** du résultat sera déterminé à l'aide du tableau suivant :

$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) : (+) = (+)$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) : (-) = (+)$
$(+) \cdot (-) = (-)$	$(+) : (-) = (-)$
$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-) : (+) = (-)$

Exemples :

a)  $(+2) \cdot (+3) =$

b)  $(-2) \cdot (+3) =$

c)  $(+2) \cdot (-3) =$

d)  $(-2) \cdot (-3) =$

e)  $(+8) : (+4) =$

f)  $(+8) : (-4) =$

g)  $(-8) : (+4) =$

h)  $(-8) : (-4) =$

**Exercice :**

a)  $(+2) \cdot (-3) =$

f)  $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) =$

b)  $(-1) \cdot (-4) \cdot (-1) =$

g)  $(+412) \cdot (-876) \cdot (+0) \cdot (-1) =$

c)  $(+3) \cdot (-1) \cdot (-1) =$

h)  $(+34) : (-2) =$

d)  $(+2) \cdot (+3) \cdot 0 =$

i)  $(-34) : (-2) =$

e)  $(-4) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-1) =$

j)  $(-34) : (+2) =$

Remarque : Lorsqu'un nombre est positif, il n'est pas obligatoire de mettre le signe + devant le nombre. Exemple :  $+3 = 3$

**§ 2.8 Exponentiation ou puissances (entières et positives)**

D'une manière plus générale, pour un nombre **a** et un entier  $n > 0$ , on note :

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}} = a^n$$

et définition, on écrit :  $a^0 = 1$  si  $a > 0$

On appelle  $a^n$  la puissance  $n^{\text{ème}}$  de **a**. Ce symbole se lit : « **a puissance n** ».

Dans le symbole  $a^n$ , l'entier **n** s'appelle **l'exposant** et le nombre **a** s'appelle la **base**.

Exemples :

a)  $(-2)^3 =$

b)  $(-2)^2 =$

c)  $(-1)^{45} =$

d)  $(-1)^{32} =$

e)  $(-3)^3 =$

f)  $(-3)^2 =$

Attention :

g)  $-2^3 =$

h)  $-2^2 =$

i)  $-1^5 =$

j)  $-1^{66} =$

Morale :

Généralement on a que :  $(-a)^n \neq -a^n$

**§ 2.9 Ordre des opérations**

Comme pour les nombres entiers, c'est l'ordre **P P M D A S**

- |     |                                  |
|-----|----------------------------------|
| (1) | LES PARENTHESES                  |
| (2) | LES PUISSANCES (et RACINES)      |
| (3) | LES MULTIPLICATIONS et DIVISIONS |
| (4) | LES ADDITIONS et SOUSTRATIONS    |

Exemples :

a)  $5 - 2 \cdot 4 =$

b)  $10 - (12 - 4) =$

c)  $2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 4 =$

d)  $5 \cdot (2 - 3 \cdot 4) =$

e)  $40 : 10 - 3 \cdot 4 - (5 - 8) =$

f)  $2 - [3 - (2 - 7)] =$

g)  $-2^2 + (-2)^2 =$

**Exercice :**

Calculer :

a)  $9 \cdot (-8) \cdot (10 - 5 \cdot 2) =$

b)  $3 \cdot 7 - 7 \cdot (-5) - (-8) =$

c)  $38 - (-4 \cdot 7) =$

d)  $5 \cdot (-8 - 9) =$

e)  $-2 \cdot (12 - 4 \cdot 2) \cdot 3 =$

**§ 2.10 La distributivité**

La multiplication est *distributive* sur l'addition (et sur la soustraction). (c.f. dans  $\mathbb{N}$ )

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Exemples : a)  $2 \cdot (5 - 7) =$

b)  $-4 \cdot (1 - 3) =$

**Exercice :**

Calculer en distribuant.

a)  $2 \cdot (4 - 5) =$

b)  $-3 \cdot (3 - 6) =$

c)  $2 \cdot (-1 - 4) =$

d)  $-4 \cdot (-1 - 2) =$

e)  $0 \cdot (2 + 5) =$

**Application :**

Calculer :

$299 \cdot 6 =$



**§ 2. 11 Exercices**

Ex 1 : Calculs sur la droite  $\mathbb{Z}$

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $-5 + 8 - 2 - 6 - 7 =$ | 2) $-9 + 5 - 2 + 5 - 9 =$ |
| 3) $+6 + 7 - 6 + 8 - 9 =$ | 4) $+8 - 7 + 4 - 8 + 4 =$ |
| 5) $4 - 1 + 2 + 4 - 3 =$  | 6) $1 - 1 - 6 + 8 + 2 =$  |

Ex 2 : Calculs dans  $\mathbb{Z}$

- |                               |                                                |
|-------------------------------|------------------------------------------------|
| 1) $10 - 2 \cdot (7 - 5) =$   | 11) $-12 - 2 \cdot (3 - 5) =$                  |
| 2) $10 - 2 \cdot 7 - 5 =$     | 12) $-12 + 2 \cdot (3 + 5) =$                  |
| 3) $4 \cdot 5 - 5 \cdot 6 =$  | 13) $-12 + 2 \cdot (3 - 5) =$                  |
| 4) $14 - (12 + 6) =$          | 14) $(5 - 6) \cdot (7 - 9) =$                  |
| 5) $14 - 12 + 6 =$            | 15) $(5 - 6) \cdot (9 - 7) =$                  |
| 6) $-12 - 2 \cdot (5 + 3) =$  | 16) $(5 - 6) \cdot (-9 - 7) =$                 |
| 7) $-12 - 2 \cdot (5 - 3) =$  | 17) $7 - 4 \cdot (5 - 3 \cdot 6) =$            |
| 8) $-12 + 2 \cdot (5 + 3) =$  | 18) $7 + 4 \cdot (5 - 3 \cdot 6) =$            |
| 9) $-12 + 2 \cdot (5 - 3) =$  | 19) $7 - 4 \cdot (5 + 3 \cdot 6) =$            |
| 10) $-12 - 2 \cdot (3 + 5) =$ | 20) $(2 + 4 - 6 - 5) \cdot (12 - 2 \cdot 5) =$ |

Ex3 :

- a)  $\frac{2-10}{4} =$       b)  $\frac{100}{65-3 \cdot 5} =$       c)  $\frac{4^2}{2-10} =$       d)  $(-3)^5 =$

Ex4 :

- |                       |                        |                     |
|-----------------------|------------------------|---------------------|
| 1) $(-3)^2 =$         | 2) $-3^2 =$            | 3) $(-2)^2 - 2^2 =$ |
| 4) $3 \cdot (-2)^3 =$ | 5) $2 - 3 \cdot 2^2 =$ | 6) $(3-5)^4 =$      |
| 7) $(3-5)^5 =$        | 8) $-3^2 - 1 =$        | 9) $(-3)^2 - 1 =$   |

Ex5 :

- |                                   |                                    |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\frac{3-18}{5} =$             | 2) $\frac{1+2 \cdot 10}{-7} =$     |
| 3) $\frac{(-2)^5}{8} =$           | 4) $\frac{1+3 \cdot 5-20}{2} =$    |
| 5) $\frac{-2-8}{-5} =$            | 6) $\frac{-3-1}{4} =$              |
| 7) $\frac{-5-20}{-2-3} =$         | 8) $\frac{2^{45}}{2^{45}} =$       |
| 9) $\frac{(-3)^{100}}{3^{100}} =$ | 10) $\frac{(-3)^{111}}{3^{111}} =$ |
-

**§ 2. 12 Exercices supplémentaires**

**Exercice 1**

Calculer :

- a)  $68 - (-4 + 112) =$
- b)  $71 + (-15) - (-9) =$
- c)  $-5 + 8 - (18 - 21) =$
- d)  $(-2) - (-2) - (-2) =$
- e)  $7 - 2 + (-7) - (-3) + (-4) =$
- f)  $8 + (-7) - (-11 - 2 + 5) =$
- g)  $-25 - (-6 + 2) =$
- h)  $12 - (7 - 19) =$
- i)  $12 - (7 - 34 - 1) + 3 =$

**Exercice 2**

Calculer :

- a)  $(-2) \cdot 4 \cdot (-3) =$
- b)  $(-5) \cdot (-2) \cdot (-1) =$
- c)  $(-3) \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-2) =$
- d)  $3 \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 5 =$
- e)  $(-5) \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-2) =$
- f)  $(-144) : (+12) =$
- g)  $(-88) : (+44) \cdot (-2) =$
- h)  $(-1) \cdot 2 \cdot (-3) =$
- i)  $2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-4) =$

**Exercice 3**

Calculer :

- a)  $(-5) \cdot (-4) \cdot (-12 + 3 \cdot 2) =$
- b)  $2 \cdot 9 - 5 \cdot (-2) + (-3) =$
- c)  $100 + (-5 \cdot 8) =$
- d)  $-6 \cdot (-7 + 8) =$
- e)  $(-5) \cdot (10 - 3 \cdot 5) \cdot (-4) =$

**Exercice 4**

Calculer :

- a)  $(-3 - 6) - (6 - 3) + (3 - 6) =$
- b)  $-(5 + 6) + (5 - 6) - (-6 - 5) =$
- c)  $-3 + (5 + 3) - 5 + (5 - 3) =$
- d)  $-2 - (-3 - 4) + (4 + 3) - 2 =$
- e)  $(4 - 6) - (6 - 3) - 4 + (3 - 6) =$
- f)  $(-3)(-4)(-1)(-2) =$
- g)  $(3 - 4)(-2) =$
- h)  $(-16 + 2 - 8)(-1) =$
- i)  $(-6 - 8 - 4)(-2) =$

**Exercice 5**

Calculer :

- a)  $2^3 =$
- b)  $(-2)^3 =$
- c)  $-2^3 =$
- d)  $3^2 - (-5)^2 =$
- e)  $(-2)^2 + (-3)^2 - 2^2 =$
- f)  $(-1)^7 - (-2)^2 - (-1)^{14} =$
- g)  $(-1)^2 - (-1)(-2) + (-1)^3 =$
- h)  $(-3)^2 + (-1)(-2)(-4) - (-5) =$
- i)  $(-6)^2 - (-1)^3 + (-2)^3 =$
- j)  $(-1)(-2) - (-3)^3 - (-1) \cdot 3 =$

**Exercice 6**

Calculer:

a)  $(2-6)^2 \cdot \sqrt{64} - 2^5 \cdot \sqrt{5^2-4^2} =$

b)  $\sqrt[3]{125} \cdot (3^2 - \sqrt{16})^3 : (-1)^3 \cdot (-3)^2 =$

c)  $\sqrt{3+6} \cdot 13 + (3^2 - \sqrt{16})^3 - 5 \cdot (6 + \sqrt{4}) =$

**Exercice 7**

Calculer :

a)  $(+21) : (-3) - (-9) \cdot (+6) =$

b)  $- (+8-7)^3 \cdot (+5)^2 - (-11+13) \cdot (-2)^4 =$

c)  $(-7-2^2)^2 - (-3)^3 \cdot (-4)^0 =$

**Exercice 8**

Calculer:

a)  $-(-5) + (-8) - (+17) - (-3) + (+42) =$

b)  $-4 - (-5+7) \cdot (-8) - 3 =$

c)  $(-3+5)^3 \cdot (-2) - [(+3)^3 - (-5)^2] \cdot (-10)^3 =$

d)  $[(-4) + (-3+6)^2]^3 : (-5)^2 + (-1)^0 \cdot (-12) =$

e)  $- (+4-5) - (-4-5) \cdot (-5) =$

**Exercice 9\***

Compléter en précisant la démarche.

1) ..... + 5 - 12 = - 8

2) ( + 5 ) - ( - 3 ) + ..... = + 7

3) ..... - [ ( - 5 ) + ( - 3 ) ] + ( - 7 ) = - 4

4) ..... - 4 + 17 = + 9

5) - ( - 11 ) + ( - 3 ) - ..... = - 8

6) ..... - 25 - 3 = - 12

7) - [ ( - 11 ) - ..... ] - ( + 3 ) \cdot ( - 4 ) = 0

8) ..... + 31 - 7 = - 2

9) [ - ( + 7 ) + ..... ] - ( - 5 ) \cdot ( - 3 ) = - 6

10) - 15 + 19 - ..... = - 7

11) [ ( - 7 ) - ..... ] \cdot ( - 5 ) + ( - 3 ) = + 47

12) 333 - 222 - ..... = 111

13) [ - ( ..... ) - ( + 12 ) ] \cdot ( - 10 ) + ( + 5 ) = + 305

14) 200 - ..... + 444 = 222

15) [ ( - 8 ) + ( + 15 ) ] \cdot ( - ..... ) + ( + 1 ) = - 139

**Solutions**

Page 2 : a) 3 ; b) -3 ; c) -3 ; d) 4 ; e) -4 ; f) 2 ; g) -10 ; h) 0 ; i) -5

Page 4 : a) -6 ; b) -24 ; c) +12 ; d) +28 ; e) -25 ; f) -3 ; g) 0 ; h) -5

Page 5 : Ex 1 : a) -6 ; b) 5 ; c) 1 ; d) -12 ; e) 1 ; f) -16 ; g) 2 ; h) -1 ; i) 8 ; j) -3

Page 6 : Ex 2 : a) 68 ; b) 62 ; c) 31 ; d) 2 ; e) 7 ; f) 22 ; g) -21 ; h) -44

Page 6 : Ex : a) -6 ; b) -4 ; c) 3 ; d) 0 ; e) 24 ; f) -120 ; g) 0 ; h) -17 ; i) 17 ; j) -17

Page 8 : Ex : a) 0 ; b) +64 ; c) +66 ; d) -85 ; e) -24

Page 8 : a)  $8 - 10 = -2$       b)  $-9 + 18 = 9$       c)  $-2 - 8 = -10$   
 d)  $4 + 8 = 12$       e)  $0 + 0 = 0$

Page 9 : Ex 1      -12    -10    6      1      6      4  
Ex 2 :      6      -9    -10    -4    8      -28    -16    4      -8    -28  
              -8      4      -16    2      -2      16      59    -45    -85    -10  
Ex 3:      a) -2                      b) 2                      c) -2                      d) -243  
Ex 4:      9      -9      0      -24    -10    16      -32    -10    8  
Ex 5 :      -3      -3      -4      -2      2      -1      5      1      1      -1

Page 10-11: Ex 1 : a) -40 ; b) 65 ; c) 6 ; d) 2 ; e) -3 ; f) 9 ; g) -21 ; h) 24 ; i) 43  
Ex 2 : a) 24 ; b) -10 ; c) -24 ; d) 45 ; e) -100 ; f) -12 ; g) 4 ; h) 6 ; i) 24  
Ex 3 : a) -120 ; b) 25 ; c) 60 ; d) -6 ; e) -100  
Ex 4 : a) -15 ; b) -1 ; c) 2 ; d) 10 ; e) -12 ; f) 24 ; g) 2 ; h) 22 ; i) 36  
Ex 5 : a) 8 ; b) -8 ; c) -8 ; d) -16 ; e) 9 ; f) -6 ; g) -2 ; h) 6 ; i) 29 ; j) 32  
Ex 6 : a) 32 ; b) -5625 ; c) 94  
Ex 7 : a) 47 ; b) -57 ; c) 148  
Ex 8 : a) 25 ; b) 9 ; c) 1984 ; d) -7 ; e) -44  
Ex 9 : 1) -1 ; 2) -1 ; 3) -5 ; 4) -4 ; 5) 16 ; 6) 16 ; 7) -23 ; 8) -26 ; 9) 16 ; 10) 11 ;  
 11) 3 ; 12) 0 ; 13) 18 ; 14) 422 ; 15) 20