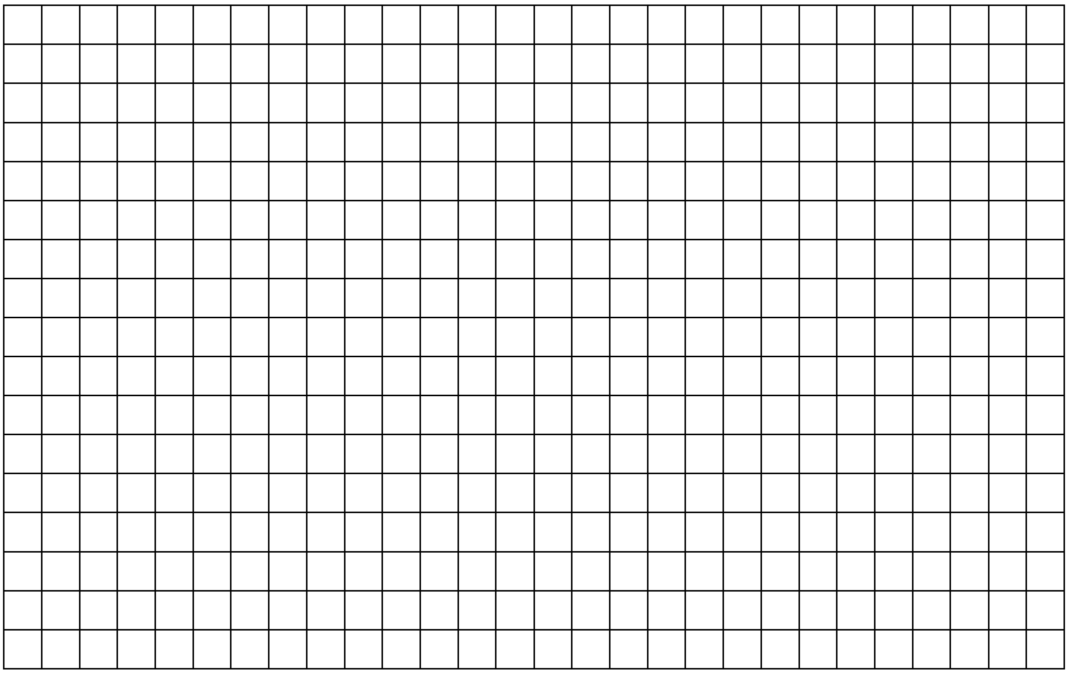
# 3. Les logarithmes

Exemple :

Représenter graphiquement l'évolution de la valeur future C(n) d'un capital initial $C_0 = 2500$ Fr placé à un taux d'intérêt périodique $I = 3{,}9\%$ en fonction de la durée n en années.

$$\boxed{C(n) = C_0(1+I)^n}$$



Comment déterminer le temps nécessaire pour obtenir un bénéfice de 1200.- Fr ?

Dispose-t-on d'un autre moyen et plus précis ?

## **§ 3.1 Les réciproques**

Soit $f$ une application.
La réciproque de $f$ est l'application "contraire" et elle est notée : $f^r$

Exemples :

$f : x \to 2x$ $\qquad f^r : x \to$ ...............

$g : x \to x+8$ $\qquad g^r : x \to$ ................

$h : x \to x^2$ $\qquad$ .......................................

$i : x \to \sin(x)$ $\qquad$ .......................................

## **§ 3.2 Les logarithmes**

Définition :

L'application ***logarithme en base a*** est la réciproque de l'exponentielle de base a

Elle est notée $log_a$

Donc : $\quad log_a : x \to \#\#\#$ $\quad$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$

et $\quad a \in \left]0;1\right[ \cup \left]1;\infty\right[$

Il nous reste à voir ce qu'il y a à la place de ###

Par définition :

$$log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Petit "truc" :

*« L'ESCARGOT »*

En français:

Pour calculer $log_a(y)$ il faut se poser la question suivante :
"A quelle puissance faut-il élever $\boldsymbol{a}$ pour obtenir $\boldsymbol{y}$ " ?

Exemples :

$log_5(25) =$ .......... car ...........

$log_2(32) =$ ........... car ..........

$log_3(81) =$ .......... car ...........

$log_5(625) =$ ........... car ..........

$log_5(125) =$ .......... car ...........

$log_{16}(4) =$ ........... car ..........

$log_9(81) =$ .......... car ...........

$log_{10}(0{,}1) =$ ........... car ..........

$log_{10}(1000) =$ .......... car ...........

$log_4(0{,}25) =$ ........... car ..........

$log_4(64) =$ .......... car ...........

$log_4(8) =$ ........... car ..........

**Les logarithmes les plus utilisés :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $log_{10}(x)$ | qui est noté | $log(x)$ |
| (2) | $log_{e}(x)$ | qui est noté | $\ln(x)$ |

Ces logarithmes "se trouvent" sur la calculatrice.

<u>Exemples</u> :

log(1000) = ........... car .......... ln(100) = ............ car .............

log(0,8) = .......... car .......... ln(0,8) = ............. car .............

log(5) = ............ car ............. ln(5) = ............... car ..............

<u>Quelques remarques</u> :

(1) $log_a(x)$ **n'existe pas** pour $x \in \left]-\infty;0\right]$

(2) $log_a(1) = 0$ car $a^0 = 1$

(3) $log_a(a) = 1$ car $a^1 = a$

(4) $log_a\left(a^x\right) = x$ car ...............

(5) $E_a(\log_a(x)) = a^{log_a(x)} = ......$

<u>Exercice 1</u> : Complétez

$log_a(y) = x$ si et seulement si ..................................................

$log_z(b) = c$ si et seulement si ..................................................

.............................. si et seulement si $m^n = p$

$log_5(8) = x$ si et seulement si ..................................................

.............................. si et seulement si $10^x = 5$

.............................. si et seulement si $e^x = 9$

<u>Exercice 2</u>: Calculez les logarithmes suivants et vérifier

<u>Exemple</u> : $log_2(8) = 3$ car $2^3 = 8$

a) log(15) = b) ln(200) = c) $log_5(5) =$

d) $log_5(1) =$ e) $log_5(625) =$ f) $log_8(64) =$

<u>Exercice 3</u> : Dessinez les applications suivantes :

$f : x \to log(x)$ $g : x \to \ln(x)$

Représenter également leur fonction réciproque.

**<u>Une propriété importante des logarithmes</u> :**

$$\boxed{\quad log\left(u^{s}\right) = s \cdot log\left(u\right) \qquad \text{et} \qquad \ln(u^{s}) = s \cdot \ln(u) \quad}$$

**<u>Application</u> :** Résoudre :

| $3 = 2^{(x+1)}$ | $5^{2x-1} = 3^{x}$ | $10^{3x+2} = 7^{2x}$ |
|---|---|---|

**<u>Formule du changement de base</u> :**

$$\boxed{log_{a}\left(x\right) = \frac{\log_{b}(x)}{\log_{b}(a)} = \frac{log(x)}{log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

<u>Exemples</u> :

$log_{2}(16) =$

$log_{2}(20) =$

$log_{7}(48) =$

<u>Exercice 4</u> : *Calculer sans calculatrice !*

a) $log_{3}(50) \cdot log\left(10^{3}\right) \cdot log_{50}(3) =$

b) $\dfrac{\log_{5}(25)}{\ln\left(e^{4}\right)} =$

c) $5^{log_{3}(81)} =$

## § 3.3 Exercices supplémentaires

Exercice 5 :
Calculer les logarithmes suivants :

a) $\log_3(17) =$  b) $\log(10) =$

c) $\log(58) =$  d) $\ln(1) =$

e) $\log_5(5) =$  f) $\log_\pi(34) =$

g) $\ln(200) =$  h) $\log_e(200) =$

i) $\log(67) =$  j) $\log_{10}(67) =$

Exercice 6 :
Dessiner :

a) $log_3 : x \to log_3(x)$  b) $log_{0,5} : x \to log_{0,5}(x)$

Exercice 7 :
Résoudre algébriquement :

a) $3^{2x+1} = 7^x$  c) $15 = 8 \cdot 10^{3x+1}$

b) $3^{3+2x} = e^x$  d) $17 = 20 \cdot e^x$

Exercice 8 :
Résoudre algébriquement

a) $log_2(16) = x$  g) $log_3(2x-1) = 1{,}8$

b) $log_x(12) = 5$  h) $log(3x+5) = 0{,}8$

c) $log_3(x) = -2$  i) $10^x = 27$

d) $log(50) = x$  j) $e^x = 10$

e) $log_e(38) = x$  k) $\ln(3x) = 5$

f) $\ln(38) = x$  l) $10^{2x-5} = 3$

Exercice 9 :
Résoudre algébriquement

a) $\sqrt[5]{log_2(x)} = \frac{3}{2}$  b) $log_8\left(\sqrt[5]{x}\right) = 0{,}9$

c) $2 \cdot \ln(3x-5)+5=7$  d) $log\left(log(5x+8)\right) = \frac{1}{3}$

e) $(5x-2)^{7/9} = 50$  f) $\sqrt[4]{log_2(15)} \cdot x^{2/3} = 15^{5/6}$

Exercice 10 :
Résoudre graphiquement :

$$\ln(x) = \frac{3x-7}{5}$$

Indication : Prendre les x dans l'intervalle [-1; 6]

## § 3.4 Applications

**Application 1 :** **Intérêts composés**

$$C = C_0 \cdot (1+t)^n$$

Avec **Co :** capital initial
**C :** capital final
**n :** temps en années
**t :** taux de placement

Remarque :
Une année bancaire se compose de 12 mois de 30 jours. Une année bancaire a donc 360 jours.

Exemple :
Transformer 15,56 ans en ***années, mois et jours.***

Exemple :
Combien de temps faut-il placer 8000 Fr. à 3 ¾ % pour qu'ils nous rapportent 850 ?

Exercice 11 : Intérêts composés
a) En plaçant 5000 Fr. à 2 % après combien de temps obtiendra-t-on un bénéfice de 859,30 Fr.
b) Quelle somme faut-il placer à 2,5 % pendant 3 ans et 5 mois pour obtenir un capital de 12583,45 Fr. ?
c) Calculer le temps nécessaire pour qu'un capital placé à 2 ¼ % double sa valeur ?
d) On place 8350 Fr. à 3,5 % pendant 5 ans, 3 mois et 20 jours. Calculer ce que rapportera cette somme.
e) Une personne emprunte la somme de 12500 Fr. et rembourse un montant de 14967,15 Fr. 15 mois plus tard. A quel taux a-t-elle emprunté cette somme ?
f) Combien de temps faut-il pour qu'un capital initial de 2'000.- Fr. engendre un bénéfice de 500.- Fr. à un taux annuel de 1,5 %.

**Application 2 :** ***Décroissance radioactive***
L'activité radioactive $A(t)$ d'un échantillon évolue dans le temps de la manière suivante :

$$\boxed{A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}}$$

avec : $A_0$ : l'activité initiale
k : la constante qui dépend de la nature de l'élément
t : le temps en années.

Exercice 12 :
Au bout de combien de temps un échantillon de constante 0,15 avec une activité de 2500 dés/sec verra cette dernière diminuer de 80 %.

Exercice 13 :
Déterminer la valeur de la constante k si l'on sait que l'on a mesuré, pour un échantillon dont l'activité était de 500 dés/sec, une activité de 498,79 dés/sec 20 ans plus tard.

**Définition :**
Une ***période*** ou une ***demi-vie*** est le temps T nécessaire pour qu'une activité ***diminue de moitié***..

On peut montre que ce temps T ne dépend pas d'activité initiale $A_0$ elle-même et du coup c'est un bon indicateur de la période de décroissance d'un facteur deux.

Exemple :
Si la demi-vie d'un échantillon est de 50 ans, cela signifie que tous les 50 ans l'activité radioactive diminue de moitié. Aussi elle diminuera d'un facteur 8 en 150 ans !

Exercice 14 :
Déterminer la **période** du $Ra_{228}$ sachant que k = 0,103

Exercice 15 :
L'activité d'un échantillon radioactif est passée de 900 dés/sec à 600 dés/sec en 40 ans.
1) Combien de temps faudra-t-il attendre que l'activité de ce même échantillon passe de 400des/sec à 200 dés/sec ?
2) Que vaut la période de cet échantillon ?

**Application 3 :** ***Croissance de population***
Le nombre d'individu au temps t est donnée par :

$$\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t}$$

Avec : $N_0$ : la population initiale
$a > 1$ le coefficient de croissance
t : le temps

Exercice 16 :
Si après 20 jours, une solution contient 19'000 bactéries et si le coefficient de croissance est de 1,13
a) Le nombre de bactéries au temps 0
b) Le nombre de bactéries qu'il y avait après dix jours
c) Le temps qu'il faudra attendre (à partir du 20$^{e}$ jour) pour que le nombre de bactéries soit de 30'000.

Exercice 17 :
Sachant que le nombre de bactéries d'une solution double toutes les semaines, trouver :
a) une formule qui donne l'évolution du nombre de bactéries en fonction du temps
b) le nombre de bactéries qu'il y aura dans 65 jours, si aujourd'hui on a dénombré 25 bactéries.

Exercice 18 :
Sachant que le nombre de bactéries d'une solution diminue de 10% toutes les deux semaines, on demande de trouver :

a) une formule qui donne l'évolution du nombre de bactéries en fonction du temps
b) le nombre de bactéries qu'il y aura dans 72 jours, si aujourd'hui on a dénombré 25000 bactéries.
c) Trouver la demi-vie.

***Applications supplémentaires :***

Exercice 19 :

La ***puissance d'une pile*** suit la loi : $P = P_o \cdot e^{-t/250}$

avec
- $P_o$ : 50 watt
- $P$ : puissance après un temps t
- $t$ : temps en jours

a) Quelle sera la puissance de cette pile après une année ?
b) Dans combien de temps cette pile ne donnera plus que la moitié de sa puissance initiale (demi-vie) ?
c) Représenter graphiquement l'évolution de la puissance en fonction du temps

Exercice 20 :

La formule $P = P_o \cdot e^{-a \cdot h}$ permet de calculer la ***pression atmosphérique*** à différentes altitudes.

Avec
- $P_o$ : pression au niveau de la mer (1 bar = $10^5$ Pa)
- $P$: pression à une altitude h
- $h$ : altitude en mètres
- $a$ : constante qui vaut 0,000125

a) A quelle altitude se trouve-t-on si la pression P est égale à la moitié de la pression Po ?
b) A quelle altitude se trouve-t-on si la pression P est égale au cinquième de Po ?
c) Représenter graphiquement la pression en fonction de l'altitude.

---

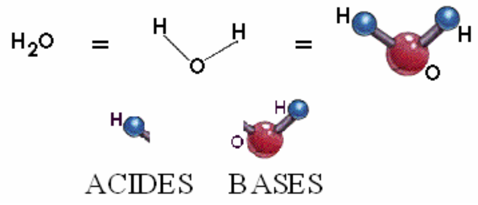
La qualité d'une eau et son **pH** sont souvent mentionnés dans une même phrase. Le pH est un facteur important dans le traitement de l'eau car certains procédés nécessitent d'être réalisé avec un pH spécifique pour être efficace. Par exemple, les réactions mettant en jeu le chlore, n'ont lieu que pour des pH de l'ordre de 6.5 à 8. . L'acidité est un des paramètres les plus important des propriétés de l'eau. L'eau est un solvant pour presque tous les ions et le pH permet de comparer les ions les plus solubles dans l'eau.

**Définition**[1] :
Le **pH** donne une indication de l'acidité d'une substance. Il est déterminé à partir de la quantité d'ions d'hydrogène libre (H+) contenus dans la substance. Le résultat d'une mesure de pH est défini par les quantités d'ions H+ et d'ions OH- présentes dans la substance. Quand les quantités de ces deux ions sont égales, l'eau (ou la substance) est considérée comme neutre, et le pH a une valeur aux alentours de 7.
Le pH d'une substance varie entre 1 et 14. Au-dessus de 7, la substance est considérée comme basique et la quantité d'ions OH- est supérieure à celle d'ions H+. Au-dessous de 7, la substance est acide; les ions H+ sont en quantités supérieures.

$$pH = -\log[H+]$$

[1] Le mot pH est l'abréviation de "pondus Hydrogenium", qui littéralement signifie le poids de l'hydrogène. Le pH donne une indication sur le teneur de l'eau en ions hydrogènes. Le pH n'a pas d'unité, c'est simplement un nombre sans dimensions.

Le pH est un facteur logarithmique; quand une solution devient dix fois plus acide, le pH diminue d'une unité. Si la solution devient 100 fois plus acide, le pH diminuera de deux unités. Le pH est aussi appelé alcalinité.




Quand une substance **acide** se dissocie dans l'eau, un ion hydrogène est relâché rendant l'eau plus acide. Le pH est déterminé par la quantité d'ions présents dans l'eau. De la même manière, quand une substance **basique** se dissocie, celle-ci libère des ions OH- à l'origine de l'augmentation de pH et donc de la basicité de l'eau.

| **pH** | **produit** |
|---|---|
| 14 | hydroxyde de sodium |
| 13 | lessive |
| 12,4 | chaux |
| 12 | eau de javel |
| 11,0 | ammoniaque |
| 10,5 | manganèse |
| 9 | savon |
| 8 | eau de mer |
| 7,4 | sang humain |

| **pH** | **produit** |
|---|---|
| 7 | eau pur |
| 6,6 | lait |
| 4,5 | tomates |
| 4 | vin |
| 3.0 | pommes |
| 2,4 | jus de citron |
| 2 | acide gastrique |
| 1 | acide de batterie |
| < 1 | acide chlorhydrique |

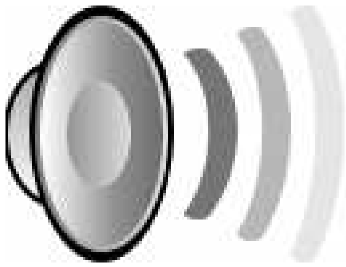
---

Pour terminer on mentionnera la mesure acoustique ramenée à une échelle logarithmique dont la mesure est une fausse unité le « **décibel** » dB.

**Définition** :
Le **décibel** dB est une mesure du ratio entre deux puissances. Il est très utilisé dans des domaines comme l'acoustique, la physique et l'électronique. Alors qu'il a été introduit à l'origine pour mesurer des ratios d'intensité et de puissance, le décibel est désormais largement répandu dans l'ensemble des champs de l'ingénierie. On l'utilise couramment pour mesurer des volumes sonores. C'est une mesure sans unité.

$$dB = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$$ avec $P_0$ : puissance de référence ($10^{-12} W / m^2$)

Exemples :
En acoustique on a :



- Seul d'audition : 0 dB
- Bruit dans une chambre à coucher : 30 dB
- Bruit d'un réacteur d'avion : 120 dB

Exercice 21 :
a) Le bruit ambiant est de 60 dB, quelle est la puissance acoustique correspondante ?
b) Le seuil de la douleur avoisine les 130 dB, quelle est la puissance acoustique correspondante ?
c) Si on double la puissance sonore, qu'est-ce que cela représente en dB ?

# Solutions

<u>Page 2 – exemple</u> :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | car | $5^2 = 25$ | 5 | car | $2^5 = 32$ |
| 4 | car | $3^4 = 81$ | 4 | car | $5^4 = 625$ |
| 3 | car | $5^3 = 125$ | 0,5 | car | $16^{0,5} = 4$ |
| 2 | car | $9^2 = 81$ | -1 | car | $10^{-1} = 0,1$ |
| 3 | car | $10^3 = 1000$ | -1 | car | $4^{-1} = 0,25$ |
| 3 | car | $4^3 = 64$ | 1,5 | car | $4^{1,5} = 8$ |

<u>Page 3 – exemple</u> :

| <u>Log</u> : | | | <u>Ln</u> : | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | car | $10^3=1000$ | 4,605 | car | $e^{4,605} = 100$ |
| -0,097 | car | $10^{-0,097}= 0,8$ | -0,223 | car | $e^{-223} = 0,8$ |
| 0,699 | car | $10^{0,699}=5$ | 1,609 | car | $e^{1,609}=5$ |

<u>Ex 1</u> :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | $\log_a(y)=x$ | ssi | $a^x=y$ | b) | $\log_z(b)=c$ | ssi | $z^c=b$ |
| c) | $\log_m(p)=n$ | ssi | $m^n=p$ | d) | $\log_5(8)=x$ | ssi | $5^x=8$ |
| e) | $\log_{10}(5)=x$ | ssi | $10^x=5$ | f) | $\ln(9)=x$ | ssi | $e^x=9$ |

<u>Ex 2</u> : a) 1,176 b) 5,298 c) 1 d) 0 e) 4 f) 2

<u>Ex 3</u> **:**

| x | -1 | 0 | 0,2 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Log(x) | /// | /// | -0,7 | -0,3 | 0 | 0,18 | 0,3 | 0,4 |
| ln(x) | /// | /// | -1,6 | -0,7 | 0 | 0,4 | 0,7 | 0,9 |

<u>Ex 4</u> : a) 3 b) 0,5 c) 625

<u>Ex 5</u> : a) 2,579 b) 1 c) 1,763 d) 0 e) 1
f) 3,081 g) 5,298 h) 5,298 i) 1,826 k) 1,826

<u>Ex 7</u> : a) -4,371 b) -2,753 c) -0,242 d) -0,163

<u>Ex 8</u> : a) 4 b) 1,644 c) 0,111 d) 1,699 e) 3,638 f) 3,638
g) 4,112 h) 0,437 i) 1,431 j) 2,303 k) 49,47 l) 2,739

<u>Ex 9</u> : a) 193,17 b) 11585,24 c) 2,573
d) 26,941 e) 30,979 f) 17,708

<u>Ex 10</u>: $x =$ 0,29 ou $x =$ 5,02

<u>Ex 11</u> : a) 8 ans b) 11565,38 Frs c) 31,15 ans = 31 ans 1 mois 24 jours
d) 1671,97 Frs e) 15,5 % f) 14,978 ans = 14 ans 11 mois 25 jours

<u>Ex 12</u> : 10,73 ans = 10 ans 8 mois 23 jours

<u>Ex 13</u> : 0,000121

<u>Ex 14</u> : 6,72 ans = 6 ans 8 mois 23 jours

<u>Ex 15</u> : k = 0,0101 ; 1) 68,63 ans ; 2) T= 68,63 ans

<u>Ex 16</u> : a) 1623 ; b) 5554 ; c) 3,7j

<u>Ex 17</u> : a) … b) 15603 bactéries

<u>Ex 18</u>: 14542 bactéries

<u>Ex 19</u> : a) 11,6 w b) 173,29j

<u>Ex 20</u> : a) 5545m b) 12875,5m

<u>Ex 21</u> : a) 0,000001 W/m$^2$ b) … c) ….