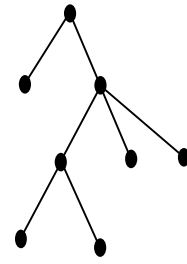


3. Analyse combinatoire

§ 3.1 Botanique mathématique : les arbres

Pour représenter des situations où plusieurs choix sont possibles, on a recours parfois à la représentation en arbre.



L'arbre ci-contre possède 5 chemins.

Exemple d'utilisation :

Combien de mots de quatre lettres peut-on réaliser avec les lettres A B C D si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 1 :

Représenter les situations ci-dessous par des arbres et compter le nombre de chemins différents.

- a) Je lance une pièce de monnaie et un dé. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

- b) Pierre et Marc se lancent un défi au tennis. La règle est la suivante : "Le premier à gagner deux parties de suite ou trois parties en tout est déclaré vainqueur". Combien y a-t-il de déroulements possibles pour ce défi ?

§ 3.2 Théorème fondamental de l'analyse combinatoire

Théorème :

Si une expérience E_1 peut donner n_1 résultats différents, et si une expérience E_2 peut donner n_2 résultats différents, alors la suite des expériences E_1 & E_2 peut donner $n_1 \cdot n_2$ résultats différents.

Exemple 1 :

Jean doit s'habiller pour sortir. Sachant qu'il doit mettre un pantalon et une veste et qu'il possède 4 pantalons différents et trois vestes différentes, de combien de manières différentes peut-il s'habiller.

Exemple 2 :

Un code est formé d'une voyelle suivie d'une consonne. Combien y a-t-il de codes différents ?

Exemple 3 :

a) Une classe est composée de 8 filles et 6 garçons. Combien a-t-on de possibilités pour choisir une fille **et** un garçon ? (donc 2 élèves en tout)

b) Une classe est composée de 8 filles et 6 garçons. Combien a-t-on de possibilités pour choisir une fille **ou** un garçon ? (donc 1 élève en tout)

Règle :

- Le **et** se traduit très souvent par une multiplication.
- Le **ou** se traduit très souvent par une addition.

Exercice 2 :

- a) Combien de "mots" de 3 lettres existe-t-il ?
- b) Combien de ces "mots" ont des lettres (toutes) différentes ?
- c) Combien commencent par A ?
- d) Combien commencent par A et ont des lettres différentes ?
- e) Combien commencent par une consonne ?
- f) Combien se terminent par une voyelle ?
- g) Combien ne contiennent que des consonnes ?
- h) Combien ne contiennent que des voyelles et toutes différents ?
- i*) Combien ont au moins une lettre qui se répète ?
- j) Combien ont les trois lettres identiques ?

Exercice 3 :

Un code est composé de 2 lettres suivies de 3 chiffres.

Exemples de code : **Z E 2 1 7** **A B 6 6 7** **Z Z 3 3 3**

- a) Combien de codes différents existe-t-il ?
- b) Combien se terminent par 5 ?
- c) Combien commencent par une voyelle ?
- d) Combien ne se terminent pas par 8 ?
- e) Combien se terminent par 3 et commencent par Z ?
- f) Combien ne contiennent que des chiffres impairs ?
- g) Combien ne contiennent que des voyelles ?
- h) Combien ne contiennent que des symboles différents ?

Exercice 4 :

On dispose des chiffres **3 4 5 6 7** pour former des nombres de 3 chiffres.

Exemples de nombres : **765 445 333**

- a) Combien peut-on former de nombres en tout si les répétitions sont permises ?
- b) Combien peut-on former de nombres en tout si les répétitions ne sont pas permises ?
- c) Combien y a-t-il de nombres pairs si les répétitions sont permises ?
- d) Combien y a-t-il de nombres pairs si les répétitions ne sont pas permises ?
- e) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions sont permises ?
- f) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 5 :

- a) On lance cinq pièces de monnaie.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- b) On lance deux pièces de monnaie et trois dés.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- c) On choisit une carte au hasard d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- d) On choisit, sans remise, deux cartes d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- e) On choisit, avec remise, deux cartes d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?

§ 3.3 Les permutations

Définition :

Permuter des objets c'est les réarranger dans un autre ordre.

Nous allons distinguer 3 sortes de permutations :

- 1) Les permutations "rectilignes" de n objets tous différents.
Exemple : trouver le nombre d'anagrammes du mot *C H I E N*
- 2) Les permutations "rectilignes" de n objets dont certains sont identiques.
Exemple : trouver le nombre d'anagrammes du mot *A N A N A S*
- 3) Les permutations "circulaires" de n objets tous différents.
Exemple : Pierre, Jean, Anne et Corinne vont au restaurant. On leur propose une table ronde. Trouver le nombre de dispositions différentes possibles.

Règles :

Pour le cas 1)	$n!$
Pour le cas 2)	$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$
Pour le cas 3)	$(n-1)!$

Notation : On note par P_n , le nombre de permutations de n objets différents.
Donc $P_n = n!$

Ce qui nous donne :

Pour l'exemple 1) : $P_5 = 5! = 120$ anagrammes possibles

Pour l'exemple 2) : $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ anagrammes possibles

Pour l'exemple 3) : $(4-1)! = 3! = 6$ dispositions différentes

Exercice 6 :

a) Ecrire tous les anagrammes du mot B A C

b) Ecrire tous les anagrammes du mot T O T O T

c) Donner toutes les dispositions différentes de l'exemple 3) ci-dessus.

Exercice 7 :

Soient Jean, Pierre, Hugues, Anne, Chantal et Sophie 6 personnes qui vont s'asseoir sur un banc (banc rectiligne à six places)

- a) Combien y a-t-il de possibilités ?
- b) Combien y a-t-il de possibilités si Jean veut être à côté de Sophie ?
- c) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons sont à gauche et les filles à droite ?
- d) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons restent groupés
- e) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons occupent les places paires ?
- f) Combien y a-t-il de possibilités si Jean est placé tout à gauche du banc ?
- g) Combien y a-t-il de possibilités si Jean veut être près de Sophie et à sa droite ?
- h) Combien y a-t-il de possibilités si Jean ne veut pas être à côté de Chantal ?
- i) Combien y a-t-il de possibilités si les personnes sont placées dans l'ordre alphabétique ?
- j) Combien y a-t-il de possibilités si Pierre veut être entre Anne et Chantal ?
- k) Combien y a-t-il de possibilités si Pierre ne veut pas être en bout de banc ?
- l) Combien y a-t-il de possibilités si Jean, Pierre et Hugues restent ensemble et dans cet ordre là ?

Exercice 8 :

- a) Combien d'anagrammes du mot DIVERTIR peut-on réaliser ?
- b) Combien commencent par D ?
- c) Combien commencent par R ?
- d) Combien commencent par T et finissent par R
- e) Combien ne commencent pas par I ?
- f) Combien commencent par V ou par I ?
- g) Combien ont les voyelles au début ?
- h) Combien ont les consonnes au début ?

Exercice 9 :

- a) Combien d'anagrammes du mot ANAGRAMMES existe-t-il ?
- b) Combien commencent par A ?
- c) Combien finissent par N ?
- d) Combien commencent par M ?
- e) Combien commencent par AME ?
- f) Combien commencent par ANA ?
- g) Combien commencent par A et finissent par S ?
- h) Combien ont les voyelles au début ?
- i) Combien ne commencent pas par G ?
- j) Combien finissent par M ou par S ?
- k) Combien ont les trois A côte à côte (groupés) ?
- l) Combien ont les lettres classées dans l'ordre alphabétique ?
- m) Combien commencent par A ou finissent par S ?
- n) Combien commencent par RARE ?

§ 3.4 Arrangements de n objets différents pris p à p

Remarque :

Un arrangement sous-entend des dispositions différentes des éléments mis en ligne. Il n'y a donc **pas de répétition** et **l'ordre des éléments à toute son importance !**

Exemple :

On dispose de 10 lettres **différentes** (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J). On veut en choisir 3 pour former un code. Combien y a-t-il de codes possibles ?

On a par exemple : « ABC , ACB , CBA, DEF, ... »

1) Première manière de résoudre le problème (théorème fondamental)

2) Deuxième manière

Définition :

Un choix ordonné de **p** objets choisis parmi **n** objets différents est un **arrangement de n objets pris p à p**.

Notation :

$A_p^n =$ « nombre d'arrangements de **n** objets différents pris **p** à **p**. »

Règle :

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Donc pour notre exemple, il s'agit de trouver $A_3^{10} =$ arrangements de 10 objets différents pris 3 à 3

Donc :

$$A_3^{10} =$$

Exercice 10 :

a) Combien de mots de 4 lettres différentes peut-on réaliser avec l'alphabet français ?

b) Combien de ces mots de 4 lettres différentes ne contiennent que des voyelles ?

c) Combien y a-t-il d'arrivées différentes pour un tiercé avec 12 partants ?

§ 3.5 Combinaisons de n objets différents pris p à p

Remarque :

Une combinaison est un « tirage » de p éléments différents choisis parmi n .
Il n'y a donc **pas de répétition** mais **l'ordre des éléments n'a pas importance !**

Exemple :

Soient 10 jouets. On veut en choisir 3 pour les donner au petit Pierre.
De combien de façons peut-on effectuer ce choix ?

Définition :

Un choix (pour lequel l'ordre n'a pas d'importance) de p objets, choisis parmi n objets différents, est une **combinaison de n objets pris p à p**

Notation : $C_p^n =$ « nombre de combinaisons de n objets différents pris p à p . »

Règle :

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Donc pour notre exemple, il s'agit de trouver :

$C_3^{10} =$ « nombre de combinaisons de **10** objets différents pris **3** à **3** »

Donc : $C_3^{10} =$

Exercice 11 :

Combien de comités différents de 5 personnes peut-on former dans une association de 20 personnes ?

Application :

Combien y a-t-il de grilles différentes pour la loterie suisse à numéros ?

Exercice 12 :

Jean, Pierre, Anne et Luc font partie d'une classe de 14 élèves composée de 8 filles et 6 garçons. On décide de créer un comité formé de 4 élèves

- Combien y a-t-il de comités possibles ?
- Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut un comité composé uniquement de filles ?
- Combien y a-t-il de comités possibles si Jean ne veut pas faire partie du comité ?
- Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut un comité composé de 2 filles et 2 garçons ?
- Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut que Pierre et Jean se retrouvent ensemble dans le comité ?
- Combien y a-t-il de comités possibles si l'on ne veut pas que Anne et Luc se retrouvent ensemble dans le comité ?
- Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut que Pierre, Jean et Anne soient dans le comité ?

Exercice 13 :

D'un jeu de 36 cartes, Pierre tire 5 cartes au hasard.

Jeu : (6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) avec 4 catégories (cœur, carreau, trèfle et pique)

- Combien y a-t-il de donnes possibles ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles contenant exactement un As ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins un As ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins 3 As ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles contenant l'As de pique ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles ne contenant pas l'As de carreau ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles contenant 3 piques et 2 cœurs ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles ne contenant pas de trèfles ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins un cœur ?
- Combien y a-t-il de donnes possibles contenant exactement un cœur ?

Solutions :

Ex 1 : a) 12 ; b) 10 ; c) 20 ; d) 14

Ex 2 : a) 17'576 ; b) 15'600 ; c) 676 ; d) 600 ; e) 13'520 ; f) 4056 ; g) 8000 ; h) 120 ; i) 1976 ; j) 26

Ex 3 : a) 676'000 ; b) 67'600 ; c) 156'000 ; d) 608'400 ; e) 2600 ; f) 84'500 ; g) 36'000 ; h) 468'000 ;

Ex 4 : a) 125 ; b) 60 ; c) 50 ; d) 24 ; e) 25 ; f) 12 ;

Ex 5 : a) 32 ; b) 864 ; c) 36 ; d) 1260 ; e) 1296 ;

Ex 6 : a) ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

b) OOTTT, OTOTT, OTTOT, OTTTO, TOOTT, TOTOT, TOTTO, TTOOT, TTOTO, TTTOO

c) ACJP, ACPJ, AJCP, AJPC, APCJ, APJC

Ex 7 : a) 720 ; b) 240 ; c) 36 ; d) 144 ; e) 36 ; f) 120 ; g) 120 ; h) 480 ; i) 1 ; j) 48 ; k) 480 ; l) 24 ;

Ex 8 : a) 10'080 ; b) 1260 ; c) 2520 ; d) 360 ; e) 7560 ; f) 3780 ; g) 180 ; h) 180 ;

Ex 9 : a) 302'400 ; b) 90'720 ; c) 30'240 ; d) 60'480 ; e) 2520 ; f) 2520 ; g) 10'080 ;

h) 1440 ; i) 272'160 ; j) 90'720 ; k) 20'160 ; l) 1 ; m) 110'880 ; n) 0 ;

Ex 10: a) $A_4^{26} = \frac{26!}{(26-4)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358'800$

b) $A_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

c) $A_3^{12} = \frac{12!}{(12-3)!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1'320$

Ex 11: $C_5^{20} = \frac{20!}{(20-5)! \cdot 5!} = 15'504$

Ex 12 : a) 1001 ; b) 70 ; c) 715 ; d) 420 ; e) 66 ; f) 935 ; g) 11 ;

Ex 13 : a) 376'992 ; b) 143'840 ; c) 175'616 ; d) 2016 ; e) 52'360 ; f) 324'632 ; g) 3024

h) 80'730 ; i) 296'262 ; j) 157'950 ;