Chapitre 3 Les fonctions exponentielles

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on définira dans un premier temps les fonctions **exponentielles**. Nous verrons les propriétés des ces fonctions et quelques applications pratiques.

Nombreuses sont les applications où apparaissent ces types de fonctions ; pour ne pas citer des domaines purement mathématiques, ***les applications économiques*** sont un aspect concret où les modèles de croissance sont basés sur des fonctions exponentielles. Ainsi, le calcul de la valeur future des économies placées sur un compte pendant quelques années, à un certain taux d'intérêt, est un problème faisant intervenir une fonction exponentielle. On peut aussi évoquer : *l'évolution de la population mondiale, la prolifération des bactéries, la décroissance radioactive, certaines réactions chimiques, …*

A titre d'exemple intéressons-nous à :

La croissance du capital

La valeur future $C(n)$ d'un capital initial C_0 placé à un taux d'intérêt périodique I pour une durée de n périodes est donnée par la formule :

$$\boxed{C(n) = C_0(1+I)^n}$$

Cette équation met en relation quatre symboles :

- $C(n)$: la valeur du capital futur en Fr.
- C_0 : la valeur du capital initial en Fr.
- I : le taux d'intérêt annuel donné en %, exprimé en valeur décimale.
- n : la durée du placement en années.

La connaissance de trois de ces symboles nous permet de trouver le quatrième.

Exemple 1 : (Le calcul de la valeur future)
Pour un placement de 1'000 Fr. à 10 % par année pendant une période de 5 ans, quel sera le capital futur.

Exemple 2 : (Le calcul de la valeur actuelle)
On souhaite connaître la valeur actuelle d'une somme de 1'610,51 Fr. payable dans cinq ans, sachant que le taux annuel est de 10%.

Exemple 3 : (Le calcul du taux)
On souhaite connaître le taux capitalisé annuellement auquel il faut placer un montant de 1'000 Fr. pour épargner 610,51 Fr. en 5 ans.

Exercice :

1) On place 1'200 Fr. sur un compte épargne de 4,5 % par année pendant une période de 4 ans. Donner l'état du compte futur.

2) On veut connaître la valeur actuelle d'une somme de 3'200 Fr. payable dans six ans sachant que le taux annuel est de 5 % .

3) Donner le taux capitalisé annuellement auquel il faut placer un montant de 3'000 Fr. pour obtenir un bénéfice de 800 Fr. en 4 ans et 6 mois.

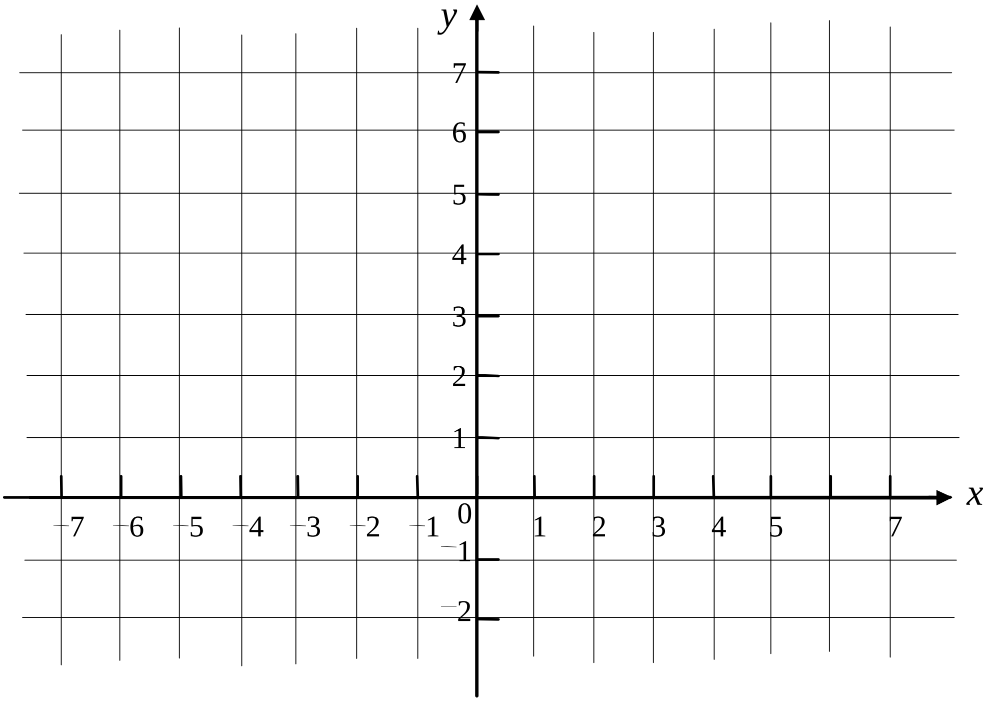
3.2 Les fonctions exponentielles

Définition :
Soit $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ on appelle « **exponentielle en base b** » la fonction :

$$\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = b^x$$

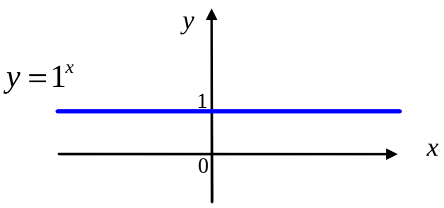
Exercice :
Compléter le tableau ci-dessous et tracer les graphiques des fonctions : $\exp_2$ et $\exp_{0,5}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$									
$y = 0,5^x$									

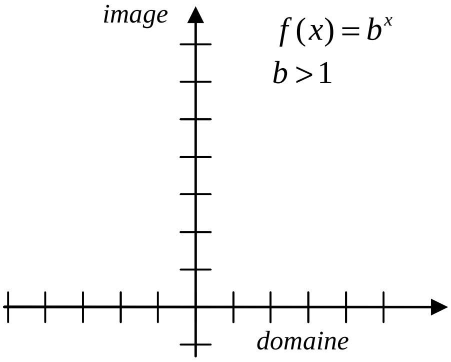


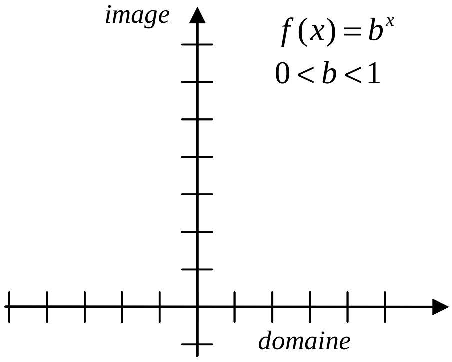
Remarques :

- La fonction exponentielle possède comme *ensemble de définition* $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$
- Son *ensemble image* est $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$
- C'est une *bijection* de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
- La fonction $y = 1^x$ n'a pas droit au titre d'exponentielle car elle n'est pas bijective :



<u>Graphes :</u>
On obtient les deux types de représentations graphiques :





Une fonction exponentielle est ***croissante*** lorsque b > 1 et ***décroissante*** lorsque 0 < b < 1.

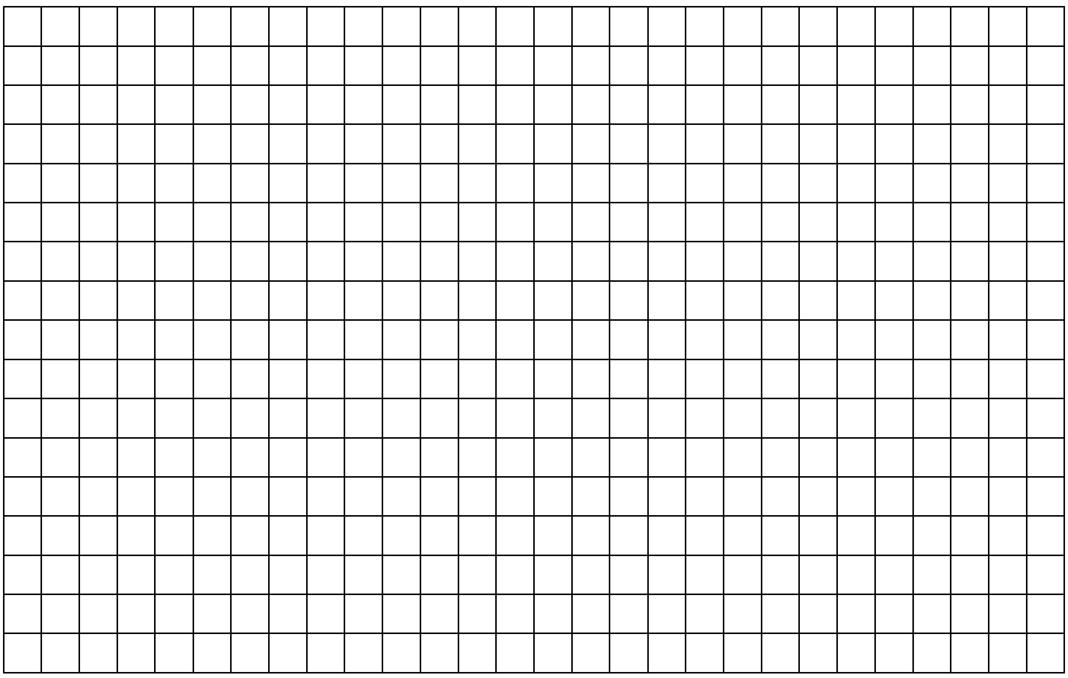
<u>Propriétés des fonctions exponentielles :</u>
Les propriétés vues pour les puissances sont valables dans le cas où l'on considère les fonctions exponentielles :

$$b^0 = 1 \qquad b^1 = b \qquad b^{x+y} = b^x \cdot b^y \qquad b^{-x} = \frac{1}{b^x} \qquad (b^x)^y = b^{xy}$$

<u>Exemple :</u>
$f(x) = 4^{x+1} \cdot 4^{2x} = 4^{3x+1}$

<u>Exercice :</u>
Représenter graphiquement l'évolution de la valeur future $\mathrm{C(n)}$ d'un capital initial $\mathrm{C}_0 = 1000$ Fr placé à un taux d'intérêt périodique $\mathrm{I} = 5\% = 0{,}05$ en fonction de la durée n en années : 0,1,2,5,10,20,50,70.

$$\boxed{C(n) = C_0(1+I)^n}$$



3.3 Les fonctions exponentielles en base 10 et en base e

Définition :
On appelle « **exponentielle en base dix** » la fonction :

$$\begin{aligned} \exp_{10} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 10^x \end{aligned}$$

Propriétés :

$10^0 = 1$ $\quad$ $10^1 = 10$ $\quad$ $10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$ $\quad$ $10^{-x} = \dfrac{1}{10^x}$ $\quad$ $(10^x)^y = 10^{x \cdot y}$

Définitions :
Le nombre irrationnel e est définit par :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = 2,718281828459\ldots$$

La fonction *exponentielle en base e* est notée par :

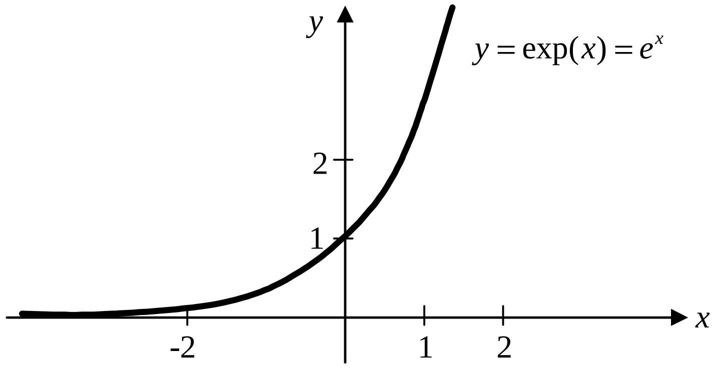
$$\begin{aligned} \exp_e &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = e^x \end{aligned}$$

Remarque :
La fonction exponentielle en base **e** est très importante en mathématiques. Elle permet entre autre de définir les fonctions hyperboliques (sinh , cosh , …). Dans l'ensemble des nombres complexes, elle donne la forme polaire d'un nombre complexe et il existe une relation forte entre les fonctions trigonométriques (cos, sin,…) et la fonction exponentielle en base e.

Propriétés :

$e^0 = 1$ $\quad$ $e^1 = e$ $\quad$ $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ $\quad$ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad$ $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$

Représentation graphique :



Exercice 1 :

Représenter la fonction $y = e^{-x}$

Exemple :

Résolution algébrique d'une équation exponentielle

Résoudre l'équation : $3^{5x-8} = 9^{x+2}$

$3^{5x-8} = (3^2)^{x+2}$ ***exprimer les deux membres avec la même base***

$3^{5x-8} = 3^{2x+4}$ *règle de calcul des puissances*

$5x-8 = 2x+4$ *les fonctions exponentielles sont bijectives*

$3x = 12$

$x = 4$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $16^{3x+2} = 2^{5x+2}$

b) $81^{7x-4} = 27^{2x+1}$

c) $25^{3x-2} = 125^{x+2}$

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $121^{x-2} = 11^{3x+9}$

b) $625^{3x+4} = 125^{4x-2}$

<u>Exercice 4</u> :

Résoudre graphiquement : $2^x - 3 = x - 1$

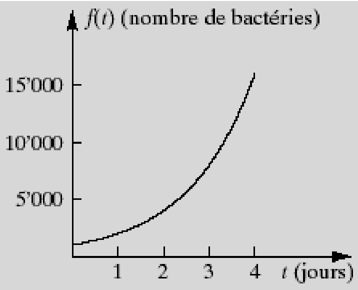
x										

Exercice 5 :

Résoudre graphiquement $0,5^x - 2 = -x^2 + 1$

x										

<u>Application</u> : **Croissance bactérienne**



On peut utiliser les fonctions exponentielles pour décrire la croissance de certaines populations. Par exemple, supposons qu'on ait observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double chaque jour.
S'il y a au départ 1000 bactéries, nous obtenons le tableau suivant, où *t* est le temps en jours et *f(t)* le nombre de bactéries au temps *t*.

t (temps en jours)	0	1	2	3	4
f(t) (nombre de bactéries)	1000	2000	4000	8000	16000

On voit que : $\boxed{f(t) = 1000 \cdot 2^t}$

Avec cette formule, nous pouvons prévoir le nombre de bactéries qu'il y a à un temps quelconque *t*.

<u>Exercice 6</u> :

a) Prévoir le nombre de bactéries après 1,5 jours.

b) Prévoir le nombre de bactéries après une semaine.

c) Prévoir le nombre de bactéries après un mois

<u>Exercice 7</u> :

Donner la loi décrivant une croissance de population sachant qu'au départ il y a 10 individus et que chaque jour la population triple. Représenter graphiquement la situation.

Certaines quantités physiques décroissent de manière exponentielle. L'un des exemples les plus communs de décroissance exponentielle est la décomposition d'une substance radioactive, ou isotope.

Application : ***Décroissance radioactive***

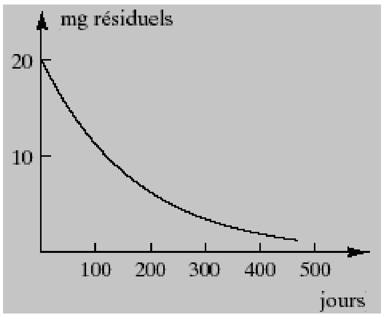
L'activité radioactive $A(t)$ d'un échantillon évolue dans le temps de la manière suivante :

$$\boxed{A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}}$$

avec : A_0 : l'activité initiale
k : la constante qui dépend de la nature de l'élément
t : le temps en années.

La **demi-vie** d'un isotope est le temps nécessaire pour que la moitié d'un échantillon donné se désintègre. La demi-vie est la principale caractéristique utilisée pour distinguer une substance radioactive d'une autre. L'isotope ^{210}Po du polonium a une demi-vie d'environ 140 jours, c'est-à-dire qu'étant donné une certaine quantité de ^{210}Po, la moitié se désintégrera en 140 jours. S'il y a au départ 20 milligrammes de ^{210}Po, le tableau suivant indique les quantités résiduelles après différents intervalles de temps.

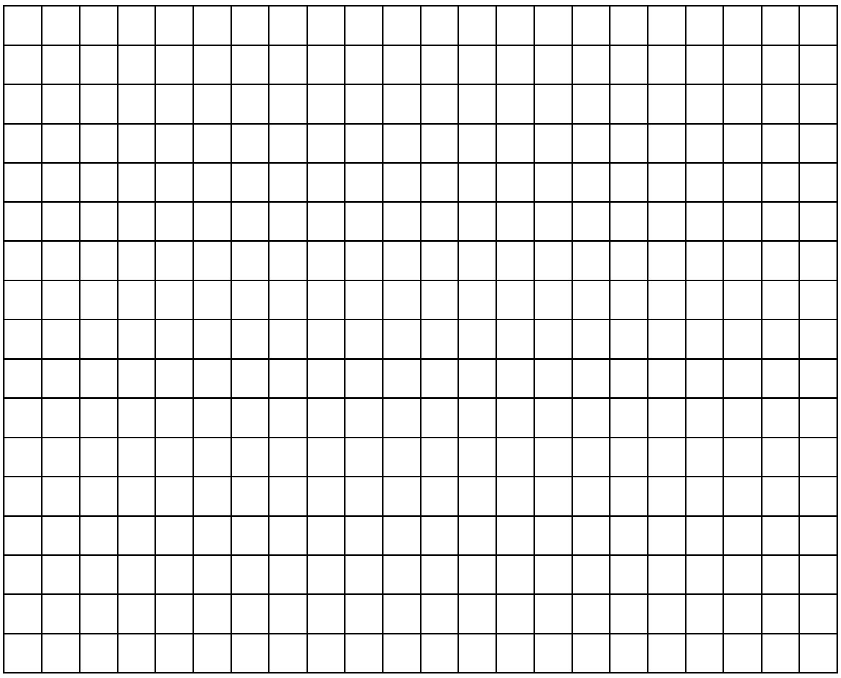
temps en jours	0	140	280	420	560
mg résiduels	20	10	5	2,5	1,25



D'autres substances radioactives ont des demi-vies beaucoup plus longues. En particulier, les réacteurs nucléaires produisent l'isotope ^{239}Pu du plutonium, dont la demi-vie est d'environ 24'000 ans. C'est pour cette raison que le stockage des déchets radioactifs est un problème majeur de la société moderne.

Exercice 8 :
Un échantillon radioactif a une activité initiale de 2'800 des/sec.
Sachant que la constante de cet échantillon vaut 0,06 :

a) Calculer son activité après 1 an, 2 ans, 10 ans, 20 ans et 50 ans.
b) Montrer, à l'aide d'un graphique, l'évolution de l'activité.



Solutions :

Exemple 1: $C(5) = 1'000 \cdot (1+0,1)^5 = 1'610,51$ Fr.

Exemple 2: $C_0 = \dfrac{1'610,51}{(1+0,10)^5} \cdot = 1'000.-$ Fr.

Exemple 3: $I = \sqrt[5]{\dfrac{1610,51}{1000}} - 1 = 0,10 = 10\%$

Exercice page 2 :
1) 1431.-
2) 2387.-
3) …

Exercice 2 : (page 6)
a) -6/7 b) 19/22 c) 10/3