Les logarithmes

Les logarithmes en base a

Définition :

L'application ***logarithme en base a*** est la réciproque de l'exponentielle de base a

Elle est notée log_a

Donc : $log_a : x \to ###$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$

et $a \in]0;1[\cup]1;\infty[$

Il nous reste à voir ce qu'il y a à la place de ###

Par définition :

$$log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Petit "truc" :

« L'ESCARGOT »

En français:

Pour calculer $log_a(y)$ il faut se poser la question suivante :
"A quelle puissance faut-il élever $\boldsymbol{a}$ pour obtenir $\boldsymbol{y}$ " ?

Exemples :

$log_5(25) =$ .... car .... $log_2(32) =$ .... car ....

$log_3(81) =$ .... car .... $log_5(625) =$ .... car ....

$log_5(125) =$ .... car .... $log_{16}(4) =$ .... car ....

$log_9(81) =$ .... car .... $log_{10}(0,1) =$ .... car ....

$log_{10}(1000) =$ .... car .... $log_4(0,25) =$ .... car ....

$log_4(64) =$ .... car .... $log_4(8) =$ .... car ....

Les logarithmes les plus utilisés :

(1)	$log_{10}(x)$	qui est noté	$log(x)$
(2)	$log_e(x)$	qui est noté	$\ln(x)$

Ces logarithmes "se trouvent" sur la calculatrice.

Exemples :

log(1000) = ... car .... ln(100) = ... car ....

log(0,8) = ... car .... ln(0,8) = ... car ....

log(5) = ... car .... ln(5) = ... car ....

Quelques remarques :

(1) $log_a(x)$ **n'existe pas** pour $x \in \left]-\infty; 0\right]$

(2) $log_a(1) = 0$ car $a^0 = 1$

(3) $log_a(a) = 1$ car $a^1 = a$

(4) $log_a\left(a^x\right) = x$ car ....

(5) $E_a(\log_a(x)) = a^{log_a(x)} = ...$

Exercice 1 : Complétez

$log_a(y) = x$ si et seulement si ....

$log_z(b) = c$ si et seulement si ....

.... si et seulement si $m^n = p$

$log_5(8) = x$ si et seulement si ....

.... si et seulement si $10^x = 5$

.... si et seulement si $e^x = 9$

Exercice 2: Calculez les logarithmes suivants et vérifier

Exemple : $log_2(8) = 3$ car $2^3 = 8$

a) $\log(15) =$ b) $\ln(200) =$ c) $log_5(5) =$

d) $log_5(1) =$ e) $log_5(625) =$ f) $log_8(64) =$

<u>Formule du changement de base</u> :

$$\boxed{log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{log(x)}{log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

<u>Exemples</u> :

$log_2(16) =$

$log_2(20) =$

$log_7(48) =$

<u>Exercice 3</u> : *Calculer sans calculatrice !*

a) $log_3(50) \cdot log\left(10^3\right) \cdot log_{50}(3) =$

b) $\dfrac{\log_5(25)}{\ln\left(e^4\right)} =$ c) $5^{log_3(81)} =$

<u>Exercice 4</u> :

Calculer les logarithmes suivants :

a) $\log_3(17) =$ b) $log(10) =$

c) $Log(58) =$ d) $\ln(1) =$

e) $\log_5(5) =$ f) $log_\pi(34) =$

g) $\ln(200) =$ h) $log_e(200) =$

i) $log(67) =$ j) $log_{10}(67) =$

Exercice 5 :
Résoudre algébriquement :

a) $3^{2x+1} = 7^x$ c) $15 = 8 \cdot 10^{3x+1}$

b) $3^{3+2x} = e^x$ d) $17 = 20 \cdot e^x$

Exercice 6 :
Résoudre algébriquement

a) $log_2(16) = x$ g) $log_3(2x-1) = 1{,}8$

b) $log_x(12) = 5$ h) $log(3x+5) = 0{,}8$

c) $log_3(x) = -2$ i) $10^x = 27$

d) $log(50) = x$ j) $e^x = 10$

e) $log_e(38) = x$ k) $\ln(3x) = 5$

f) $\ln(38) = x$ l) $10^{2x-5} = 3$

Exercice 7 :
Résoudre algébriquement

a) $\sqrt[5]{log_2(x)} = \dfrac{3}{2}$ b) $log_8\left(\sqrt[5]{x}\right) = 0{,}9$

c) $2 \cdot \ln(3x-5) + 5 = 7$ d) $Log\left(Log(5x+8)\right) = \dfrac{1}{3}$

e) $(5x-2)^{7/9} = 50$ f) $\sqrt[4]{log_2(15)} \cdot x^{2/3} = 15^{5/6}$

Applications :

Exemple :
Combien de temps faut-il placer 8000 Fr. à 3 ¾ % pour qu'ils nous rapportent 850 ?

Exercice 8 : Intérêts composés (*t : le temps en années.)*

a) En plaçant 5000 Fr. à 2 % après combien de temps obtiendra-t-on un bénéfice de 859,30 Fr.
b) Quelle somme faut-il placer à 2,5 % pendant 3 ans et 5 mois pour obtenir un capital de 12583,45 Fr. ?
c) Calculer le temps nécessaire pour qu'un capital placé à 2 ¼ % double sa valeur ?
d) On place 8350 Fr. à 3,5 % pendant 5 ans, 3 mois et 20 jours. Calculer ce que rapportera cette somme.
e) Une personne emprunte la somme de 12500 Fr. et rembourse un montant de 14967,15 Fr. 15 mois plus tard. A quel taux a-t-elle emprunté cette somme ?
f) Combien de temps faut-il pour qu’un capital initial de 2'000.- Fr. engendre un bénéfice de 500.- Fr. à un taux annuel de 1,5 %.

Exercice 9 :
Au bout de combien de temps un échantillon de constante 0,15 avec une activité de 2500 dés/sec verra cette dernière diminuer de 80 %.

Exercice 10 :
Déterminer la valeur de la constante k si l'on sait que l'on a mesuré, pour un échantillon dont l'activité était de 500 dés/sec, une activité de 498,79 dés/sec 20 ans plus tard.

Exercice 11 :
Déterminer la **période** (demi-vie) du Ra_{228} sachant que k = 0,103

Exercice 12 :
L'activité d'un échantillon radioactif est passée de 900 dés/sec à 600 dés/sec en 40 ans.
1) Combien de temps faudra-t-il attendre que l'activité de ce même échantillon passe de 400des/sec à 200 dés/sec ?
2) Que vaut la période de cet échantillon ?

Exercice 13 :
Si après 20 jours, une solution contient 19'000 bactéries et si le coefficient de croissance est de 1,13
a) Le nombre de bactéries au temps 0
b) Le nombre de bactéries qu'il y avait après dix jours
c) Le temps qu'il faudra attendre (à partir du 20^{e} jour) pour que le nombre de bactéries soit de 30'000.

Exercice 14 :
Sachant que le nombre de bactéries d'une solution double toutes les semaines, trouver :
a) une formule qui donne l'évolution du nombre de bactéries en fonction du temps
b) le nombre de bactéries qu'il y aura dans 65 jours, si aujourd'hui on a dénombré 25 bactéries.

Exercice 15 :
Sachant que le nombre de bactéries d'une solution diminue de 10% toutes les deux semaines, on demande de trouver :

a) une formule qui donne l'évolution du nombre de bactéries en fonction du temps
b) le nombre de bactéries qu'il y aura dans 72 jours, si aujourd'hui on a dénombré 25000 bactéries.
c) Trouver la demi-vie.

Exercice 16 :
La ***puissance d'une pile*** suit la loi : $P = P_o \cdot e^{-t/250}$

avec
P_o : 50 watt
P : puissance après un temps t
t : temps en jours

a) Quelle sera la puissance de cette pile après une année ?
b) Dans combien de temps cette pile ne donnera plus que la moitié de sa puissance initiale (demi-vie) ?
c) Représenter graphiquement l'évolution de la puissance en fonction du temps

Exercice 17 :
La formule $P = P_o \cdot e^{-a \cdot h}$ permet de calculer la ***pression atmosphérique*** à différentes altitudes.

Avec P_o : pression au niveau de la mer (1 bar = 10^5 Pa)
P: pression à une altitude h
h : altitude en mètres
a : constante qui vaut 0,000125

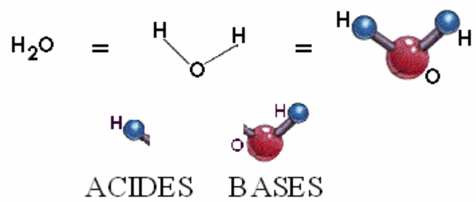
a) A quelle altitude se trouve-t-on si la pression P est égale à la moitié de la pression Po ?
b) A quelle altitude se trouve-t-on si la pression P est égale au cinquième de Po ?
c) Représenter graphiquement la pression en fonction de l'altitude.

La qualité d'une eau et son **pH** sont souvent mentionnés dans une même phrase. Le pH est un facteur important dans le traitement de l'eau car certains procédés nécessitent d'être réalisé avec un pH spécifique pour être efficace. Par exemple, les réactions mettant en jeu le chlore, n'ont lieu que pour des pH de l'ordre de 6.5 à 8. . L'acidité est un des paramètres les plus important des propriétés de l'eau. L'eau est un solvant pour presque tous les ions et le pH permet de comparer les ions les plus solubles dans l'eau.

Définition[1] :
Le **pH** donne une indication de l'acidité d'une substance. Il est déterminé à partir de la quantité d'ions d'hydrogène libre (H+) contenus dans la substance. Le résultat d'une mesure de pH est défini par les quantités d'ions H+ et d'ions OH- présentes dans la substance. Quand les quantités de ces deux ions sont égales, l'eau (ou la substance) est considérée comme neutre, et le pH a une valeur aux alentours de 7.
Le pH d'une substance varie entre 1 et 14. Au-dessus de 7, la substance est considérée comme basique et la quantité d'ions OH- est supérieure à celle d'ions H+. Au-dessous de 7, la substance est acide; les ions H+ sont en quantités supérieures.

$$pH = -\log[H+]$$

Le pH est un facteur logarithmique; quand une solution devient dix fois plus acide, le pH diminue d'une unité. Si la solution devient 100 fois plus acide, le pH diminuera de deux unités. Le pH est aussi appelé alcalinité.



Quand une substance **acide** se dissocie dans l'eau, un ion hydrogène est relâché rendant l'eau plus acide. Le pH est déterminé par la quantité d'ions présents dans l'eau. De la même manière, quand une substance **basique** se dissocie, celle-ci libère des ions OH- à l'origine de l'augmentation de pH et donc de la basicité de l'eau.

[1] Le mot pH est l'abréviation de "pondus Hydrogenium", qui littéralement signifie le poids de l'hydrogène. Le pH donne une indication sur le teneur de l'eau en ions hydrogènes. Le pH n'a pas d'unité, c'est simplement un nombre sans dimensions.

pH	produit
14	hydroxyde de sodium
13	lessive
12,4	chaux
12	eau de javel
11,0	ammoniaque
10,5	manganèse
9	savon
8	eau de mer
7,4	sang humain

pH	produit
7	eau pur
6,6	lait
4,5	tomates
4	vin
3.0	pommes
2,4	jus de citron
2	acide gastrique
1	acide de batterie
< 1	acide chlorhydrique

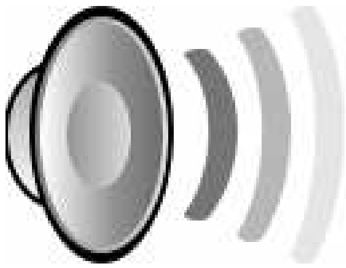
Pour terminer on mentionnera la mesure acoustique ramenée à une échelle logarithmique dont la mesure est une fausse unité le « **décibel** » dB.

Définition :
Le **décibel** dB est une mesure du ratio entre deux puissances. Il est très utilisé dans des domaines comme l'acoustique, la physique et l'électronique. Alors qu'il a été introduit à l'origine pour mesurer des ratios d'intensité et de puissance, le décibel est désormais largement répandu dans l'ensemble des champs de l'ingénierie. On l'utilise couramment pour mesurer des volumes sonores. C'est une mesure sans unité.

$$dB = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

avec P_0 : puissance de référence ($10^{-12} W / m^2$)

Exemples :
En acoustique on a :



- Seul d'audition : 0 dB
- Bruit dans une chambre à coucher : 30 dB
- Bruit d'un réacteur d'avion : 120 dB

Exercice 18 :
a) Le bruit ambiant est de 60 dB, quelle est la puissance acoustique correspondante ?

b) Le seuil de la douleur avoisine les 130 dB, quelle est la puissance acoustique correspondante ?

c) Si on double la puissance sonore, qu'est-ce que cela représente en dB ?

Exercice 19 :

Dessiner : a) $log_3 : x \to log_3(x)$ b) $log_{0,5} : x \to log_{0,5}(x)$

Exercice 20 :

Résoudre graphiquement : $\ln(x) = \frac{3x-7}{5}$ Indication : Prendre les *x* dans l'intervalle [-1; 6]

Quantité de médicament dans le sang

La quantité de médicament mesurée dans le sang en fonction du temps est donnée par la relation suivante :

$$\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$$

où : t est le temps [heures]

Q la quantité de médicament au temps t [mg]

Q_0 la quantité de médicament initiale [mg]

λ la caractéristique du médicament

Demi-vie en biologie et pharmacologie

En pharmacologie, la demi-vie (ou période) **T** désigne le temps nécessaire pour que la quantité d'une substance contenue dans un système biologique soit diminuée de la moitié de sa valeur initiale (par exemple la teneur d'un médicament dans le plasma sanguin).

Ce paramètre varie légèrement d'un individu à l'autre, selon le processus d'élimination et le fonctionnement relatif de l'individu.

En pratique, on considère qu'un médicament n'a plus d'effet pharmacologique après 5 à 7 demi-vies.

Exercice 21 :

On observe qu'après 3 heures la quantité de médicament dans le sang passe de 25 mg à 10 mg

a) Trouver la caractéristique du médicament
b) Que vaut la demi-vie ?
c) Après combien de temps ce médicament est-il considéré comme inactif

Exercice 22 :

Résoudre (graphiquement) : $\log(x+2) = 2 - x^2$

Exercice 23 :

a) Si on mesure initialement dans le sang 12 mg de médicament et que la quantité diminue de 20 % après une heure, quelle est la caractéristique λ du médicament ?
b) Que vaut la période (ou demi-vie) de ce médicament ?
c) Après combien de temps ce médicament est-il considéré comme inactif ?
d) Quelle quantité de médicament est présente dans le sang après 5 heures ?
e) Donner une représentation graphique de la situation.

Exercice 24 :

On injecte, par piqûre intraveineuse, une dose d'une substance médicamenteuse dans le sang à l'instant t=0 (t est exprimé en heures).

a) Après 2 heures, on mesure 1,8 mg dans le sang et encore une heure plus tard on observe que la quantité a diminué de 30%. Déterminer Q_0 et λ.
b) Calculer le temps nécessaire au bout duquel la quantité de substance initiale dans le sang a été réduite de moitié. Quand la substance perdra-t-elle de son effet ?
c) Depuis l'injection quelle quantité de médicament est théoriquement présente dans le sang après 4h15min ?

Exercice 25 : Trouver la relation entre T et λ.

Solutions

Page 2 – exemple :

2	car	$5^2 = 25$	5	car	$2^5 = 32$
4	car	$3^4 = 81$	4	car	$5^4 = 625$
3	car	$5^3 = 125$	0,5	car	$16^{0,5} = 4$
2	car	$9^2 = 81$	-1	car	$10^{-1} = 0,1$
3	car	$10^3 = 1000$	-1	car	$4^{-1} = 0,25$
3	car	$4^3 = 64$	1,5	car	$4^{1,5} = 8$

Page 3 – exemple :

log :			ln :		
3	car	$10^3=1000$	4,605	car	$e^{4,605} = 100$
-0,097	car	$10^{-0,097}= 0,8$	-0,223	car	$e^{-223} = 0,8$
0,699	car	$10^{0,699}=5$	1,609	car	$e^{1,609}=5$

Ex 1 :

a)	$\log_a(y)=x$	ssi	$a^x=y$	b)	$\log_z(b)=c$	ssi	$z^c=b$
c)	$\log_m(p)=n$	ssi	$m^n=p$	d)	$\log_5(8)=x$	ssi	$5^x=8$
e)	$\log_{10}(5)=x$	ssi	$10^x=5$	f)	$\ln(9)=x$	ssi	$e^x=9$

Ex 2 : a) 1,176 b) 5,298 c) 1 d) 0 e) 4 f) 2

Ex 3 : a) 3 b) 0,5 c) 625

Ex 4 : a) 2,579 b) 1 c) 1,763 d) 0 e) 1
f) 3,081 g) 5,298 h) 5,298 i) 1,826 k) 1,826

Ex 5 : a) -4,371 b) -2,753 c) -0,242 d) -0,163

Ex 6 : a) 4 b) 1,644 c) 0,111 d) 1,699 e) 3,638 f) 3,638
g) 4,112 h) 0,437 i) 1,431 j) 2,303 k) 49,47 l) 2,739

Ex 7 : a) 193,17 b) 11585,24 c) 2,573
d) 26,941 e) 30,979 f) 17,708

Ex 8 : a) 8 ans b) 11565,38 Frs c) 31,15 ans = 31 ans 1 mois 24 jours
d) 1671,97 Frs e) 15,5 % f) 14,978 ans = 14 ans 11 mois 25 jours

Ex 9 : 10,73 ans = 10 ans 8 mois 23 jours Ex 10 : 0,000121

Ex 11 : 6,72 ans = 6 ans 8 mois 23 jours Ex 12 : k = 0,0101 ; 1) 68,63 ans ; 2) T= 68,63 ans

Ex 13 : a) 1623 ; b) 5554 ; c) 3,7j

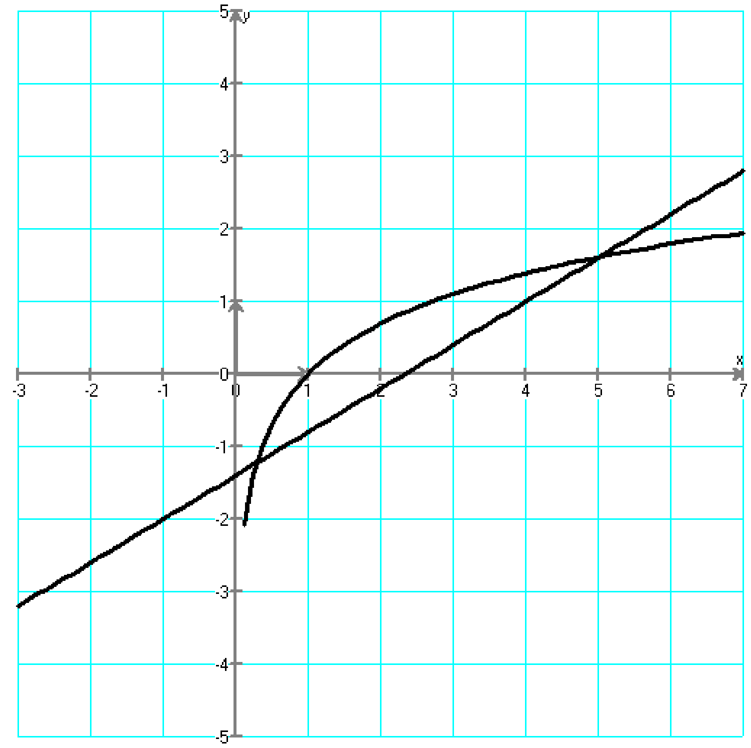
Ex 14 : a) … b) 15603 bactéries

Ex 15: 14542 bactéries

Ex 16 : a) 11,6 w b) 173,29j

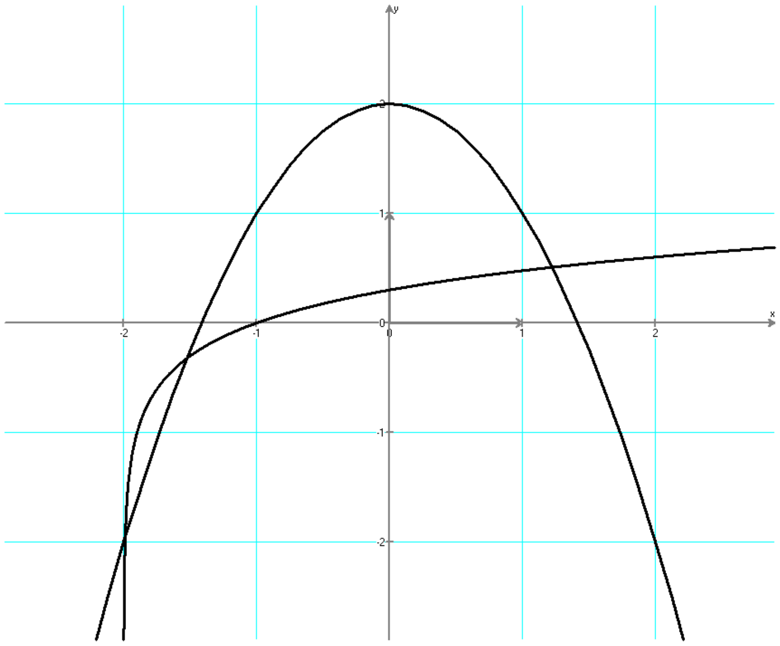
Ex 17 : a) 5545m b) 12875,5m

Ex 20: $x =$ 0,29 ou x = 5,02



Ex 21 : a) 0,305 b) 2,27 h = 2h 16 min c) 11 à 16 heures

Ex 22



Ex 23 : a) 0,223 b) 3h 6min

Ex 24 :