

### 4. Systèmes d'équations

#### § 4.1 Introduction

Soit le système :

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 6x - y = 11 \end{cases}$$

Il s'agit de trouver  $x$  et  $y$  qui vérifient les deux équations en **même temps ! !**

Nous allons étudier deux méthodes :

- 1) La méthode de substitution.
- 2) La méthode d'addition.

Dans les deux cas le principe veut qu'on se ramène à une équation à une inconnue...



#### § 4.2 La méthode de substitution

Pour chaque équation ci-dessous, isoler  $y$

Ex 1: a)  $34x + y = 78$       b)  $67x + y = -45$       c)  $-34x + y = 45$

d)  $-54x - y = -45$       e)  $12x - y = 0$       f)  $-9x - y = 0$

Ex 2: a)  $-33x + 9y = -8$       b)  $56x + 6y = 0$       c)  $-7x + 9y = 0$

d)  $-28x - 2y = -8$       e)  $12x - 6y = 0$       f)  $-5x - 7y = 0$

#### Principe de la méthode de substitution:

- Isoler  $y$  (ou  $x$ ) dans l'une des deux équations puis **substituer** dans l'autre afin d'obtenir une équation à une seule inconnue en  $x$  (respectivement  $y$ ).



$$\begin{cases} ax + by = c & (I) \\ a'x + b'y = c' & (II) \end{cases} \xrightarrow[\text{y dans (II)}]{\text{isoler par exemple}} \begin{cases} ax + by = c & (I) \\ y = f(x) & (II) \end{cases} \xrightarrow{\text{substituer dans (I)}} ax + b \cdot f(x) = c$$

- Résoudre l'équation obtenue  $ax + b \cdot f(x) = c$  et déterminer l'inconnue  $x$  (respectivement  $y$ ).
- Déterminer l'inconnue manquante  $y$  (respectivement  $x$ ) en utilisant l'une des deux équations initiales.
- Donner l'ensemble des solutions :  $S = \{(x, y)\}$

Exemples :

a) Résoudre : 
$$\begin{cases} x + y = 7 & (I) \\ 2x - 3y = -11 & (II) \end{cases}$$

b) Résoudre : 
$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 6x - y = 11 \end{cases}$$

Ex 3:

a) 
$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 5x + 4y = 22 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} -5x + y = -2 \\ 3x + 6y = 21 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} 4x + 6y = 26 \\ x - 6y = -16 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} 6x + 5y = 11 \\ -5x + y = -4 \end{cases}$$

Ex 4:

a) 
$$\begin{cases} 4x + 3y = -7 \\ x + 4y = -5 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x + y = -9 \\ 6x + 4y = -24 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 4x + 6y = -16 \\ 4x + y = -6 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} -x - 4y = 15 \\ 5x + 5y = -30 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} -x + 5y = -22 \\ -3y = 12 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} -4x - y = -6 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

### §4.3 La méthode d'addition

#### Principe:

- Multiplier judicieusement chaque équation, afin qu'en **additionnant** membre à membre les deux équations, l'une des deux inconnues s'élimine. Ce choix est conditionné par le **PPCM**.



$$\begin{cases} ax + by = c & (I) \\ a'x + b'y = c' & (II) \end{cases} \xrightarrow{\text{cherchons à éliminer } y} + \begin{cases} dx + ey = f & (I) \\ d'x - ey = g & (II) \end{cases}$$

$$\underline{dx + d'x = f + g}$$

On obtient pour  $y$  des coefficients **contraires** qui s'éliminent par l'addition.

- Résoudre l'équation obtenue  $dx + d'x = f + g$  et déterminer l'inconnue  $x$ .
- Déterminer l'inconnue manquante  $y$  (respectivement  $x$ ) en utilisant l'une des deux équations initiales.
- Donner l'ensemble des solutions :  $S = \{(x, y)\}$

#### Exemple :

Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 7 & (I) \\ 2x - 3y = -11 & (II) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7x + 4y = 9 \\ -2x + 3y = 14 \end{cases}$$

Ex 5:

Résoudre par addition :

a) 
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ x - 5y = -15 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 3x - 17y = 29 \\ 6x + y = 23 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} \frac{6}{5}x - y = 5 \\ x - \frac{y}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} x + y = -\frac{9}{4} \\ 2x + 3y = -\frac{27}{4} \end{cases}$$

Ex 6:

Résoudre par addition :

a) 
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = -2 \\ x - \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{4y}{3} = -6 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2(5 - 2x) + y = 5 \\ \frac{2y}{3} - \frac{x}{3} = -1 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = -2 \\ \frac{x}{8} - \frac{5y}{6} = \frac{11}{4} \end{cases}$$

**§4.4 Exercices supplémentaires:**Ex 7:

Résoudre par la méthode de substitution ou d'addition :

a) 
$$\begin{cases} \frac{x+2y}{3} - x = 4 \\ 2x+17 = 3y \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x + \frac{11}{2} = \frac{2y}{4} \\ \frac{3x}{2} + 5y + 8 = 0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} \frac{10x}{7} + 5y + \frac{37}{2} = 0 \\ 5(x+y) - 4 = -10 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} \frac{x-2y}{5} - 3x + 2 = 0 \\ 10(x+y) = 20 \end{cases}$$

Ex 8:

Résoudre :

a) 
$$\begin{cases} -x + 6y = 3 \\ -3y = -3 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} -x = 2 \\ 6x - 3y = -15 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} -6x - 4y = 0 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ \frac{1}{3}x + y = -2 \end{cases}$$

### §4.5 Problèmes

- 1) La somme de deux nombres vaut 60. La moitié du premier nombre augmentée du tiers du deuxième nombre vaut 24. Quels sont ces nombres ?
- 2) La moyenne de deux nombres vaut 20. Le plus grand vaut quatre **de** plus que le plus petit. Quels sont ces nombres ?
- 3) La moyenne de deux nombres vaut 20. Le plus grand vaut quatre **fois** le plus petit. Quels sont ces nombres ?
- 4) Le triple de la somme de deux nombres vaut 150. La différence entre les deux nombres vaut 34. Quels sont ces nombres ?
- 5) Un bouquet de huit roses et 5 œillets coûte 55 Frs. et un bouquet de sept roses et deux œillets coûte 41 Frs.  
Quel est le prix d'un bouquet composé de 3 roses et 5 œillets ?
- 6) Une bouteille et son bouchon coûtent 20 Frs. La bouteille coûte 19 Frs. de plus que le bouchon. Quel est le prix de la bouteille ?
- 7) Jean a des pièces de 2 Frs. et de 5 Frs. Il a 27 pièces en tout, pour une somme de 99 Frs.  
Combien a-t-il de pièces de 2 Frs. ?

### §4.6 Problèmes supplémentaires

P1 :

Pour organiser une sortie de fin d'année, un collège loue des cars. Il y a des grands cars de 56 places et des petits cars de 44 places. Il y a 4 grands cars de plus que de petits cars. 624 élèves participent à la sortie et tous les cars sont remplis. Combien le collège a-t-il loué de cars de chaque catégorie ?

P2 :

Soient deux nombres. En retranchant au premier nombre le double du second, on obtient 21. En ajoutant au second nombre le tiers du premier, on trouve 27. Quels sont ces nombres ?

P3:

Charles a 10 ans de plus que Pauline. Dans 5 ans, Pauline aura les  $\frac{2}{3}$  de l'âge de Charles.

Déterminer l'âge de Charles et celui de Pauline.

P4:

Trois petits verres P remplissent le verre V. Il faut 8 verres V et un petit verre P pour remplir la bouteille B d'un litre.  
Quelle est la contenance des verres V et P ?



**Solutions des exercices :**

Ex 1	a) $y = 78 - 34x$ d) $y = -54x + 45$	b) $y = -45 - 67x$ e) $y = 12x$	c) $y = 45 + 34x$ f) $y = -9x$
Ex 2	a) $y = -8/9 + 11x/3$ d) $y = -14x + 4$	b) $y = -28x/3$ e) $y = 2x$	c) $y = 7x/9$ f) $y = -5x/7$
Ex 3	a) $\langle 1 ; 2 \rangle$ d) $\langle 1 ; 3 \rangle$	b) $\langle 2 ; 1 \rangle$ e) $\langle 2 ; 3 \rangle$	c) $\langle 2 ; 3 \rangle$ f) $\langle 1 ; 1 \rangle$
Ex 4	a) $\langle -1 ; -1 \rangle$ d) $\langle -3 ; -3 \rangle$	b) $\langle -2 ; -3 \rangle$ e) $\langle 2 ; -4 \rangle$	c) $\langle -1 ; -2 \rangle$ f) $\langle 1 ; 2 \rangle$
Ex 5	a) $\langle 2 ; 1 \rangle$ d) $\langle -5/3 ; -7 \rangle$	b) $\langle 5 ; 4 \rangle$ e) $\langle 0 ; -9/4 \rangle$	c) $\langle 4 ; -1 \rangle$
Ex 6	a) $\langle 2 ; -3 \rangle$	b) $\langle 8 ; 9 \rangle$	c) $\langle 1 ; -1 \rangle$ d) $\langle 2 ; -3 \rangle$
Ex 7	a) $\langle -1 ; 5 \rangle$	b) $\langle -2 ; -1 \rangle$	c) $\langle 3,5 ; -4,7 \rangle$ d) $\langle 0,5 ; 1,5 \rangle$
Ex 8	a) $\langle 3 ; 1 \rangle$	b) $\langle -2 ; 1 \rangle$	c) $\langle 2 ; -3 \rangle$ d) pas de solution

**Solutions des problèmes**

- 24 et 36
- 18 et 22
- 8 et 32
- 8 et 42
- 30 Fr.
- 19,50 Fr.
- 12 pièces de 2 Fr.

**P1 :** $x$  : Nombre de grands cars $y$  : Nombre de petits cars

$$\begin{cases} 56x + 44y = 624 \\ x = y + 4 \end{cases} \rightarrow x = 8 \quad y = 4 \quad \text{Réponse : Il y a 8 grands cars et 4 petits}$$

**P2 :** $x$  et  $y$  les nombres cherchés

$$\begin{cases} x - 2y = 21 \\ y + \frac{x}{3} = 27 \end{cases} \rightarrow x = 45 \quad y = 12 \quad \text{Réponse : Les deux nombres sont 45 et 12}$$

**P3 :** $x$  : l'âge de Charles $y$  : l'âge de Pauline

$$\begin{cases} x = y + 10 \\ y + 5 = \frac{2}{3} \cdot (x + 5) \end{cases} \rightarrow x = 25 \quad y = 15 \quad \text{Réponse : Charles a 25 ans et Pauline 15.}$$

**P4 :**

$$\begin{cases} 3P = V \\ 8V + P = 1 \end{cases} \rightarrow V = 0,12 \quad P = 0,04 \quad \text{Réponse : V contient 12 cl et P contient 4 cl.}$$