Chapitre 4 Les fonctions logarithmiques

4.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on étudiera les fonctions **réciproques** des fonctions **exponentielles** : les fonctions **logarithmiques**. Nous verrons les propriétés des ces fonctions. Dans la deuxième partie du cours, on cherchera à résoudre des **équations exponentielles** et **logarithmiques**.

Au chapitre précédent et à titre d'exemple, on s'est intéressé à :

La croissance du capital
La valeur future $C(n)$ d'un capital initial C_0 placé à un taux d'intérêt périodique I pour une durée de n années est donnée par la formule :

$$\boxed{C(n) = C_0(1+I)^n}$$

Problème : (Le calcul de la durée)
Pendant combien de temps il faut placer un capital de 1'000 Fr. à un taux de 10% pour obtenir 1'610,51 Fr. ?

Rappel :
Si on considère une fonction **bijective** f, on dira que f^{-1} est sa fonction **réciproque** si pour tous les $x \in Dom(f)$ on a :

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

Exemples :

a) La fonction « racine carrée » $\sqrt{...}$ et la fonction « élevé au carré » $...^2$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre : $\sqrt{x^2} = x$
b) Les fonctions $\sqrt[3]{...}$ et $...^3$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
c) Les fonctions $\cos(...)$ et $\arccos(...)$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

4.1 Les fonctions logarithmiques en base 10 et en base e

Définition :
On appelle « **logarithme en base 10** » la fonction *réciproque* de fonction exponentielle en base 10.
C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. On note : $y = \log_{10} x$
On a :

$$\boxed{y = \log_{10} x \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^y} \quad \text{pour} \quad \boxed{x > 0}$$

Exemples :

1) $\log_{10} 1000 = ...$ car $10^{.....} = 1000$
2) $\log_{10} 0,001 = ...$ car $10^{......} = 0,001$

Définition :
On appelle « **logarithme en base e** » la fonction *réciproque* de fonction exponentielle en base ***e***.
C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. On note : $y = \log_e x$
On dit également que c'est le ***logarithme naturel*** ou le ***logarithme Népérien***.
On note alors plus généralement : $y = \ln x$
On a :

$$\boxed{y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y} \quad \text{pour} \quad \boxed{x > 0}$$

Remarques :

- Attention, les fonctions logarithmiques $\log_{10}(x)$ et $\ln(x)$ ne sont pas définies pour $x \leq 0$.
- Dans la majorité des cas, il est difficile de calculer le logarithme d'un nombre, sauf si l'on dispose d'une table (formulaire) ou d'une calculatrice.

Notation dans la littérature : :
Les bases les plus courantes sont :

- La **base 10** et $\log_{10}(...)$ se note : $\log(...)$
- La **base e** et $\log_e(...)$ se note : $\ln(...)$ ou $\text{Log}(...)$

Il faut donc se méfier des notations dans la littérature entre Log, $\log$ et $\ln$.

Exercice:
Calculer ou compléter :

$\log_{10} 10'000 =$ $\log_{10} 0,00001 =$ $\log_{......} 0,01 = -2$

Propriété 1 :
On a :

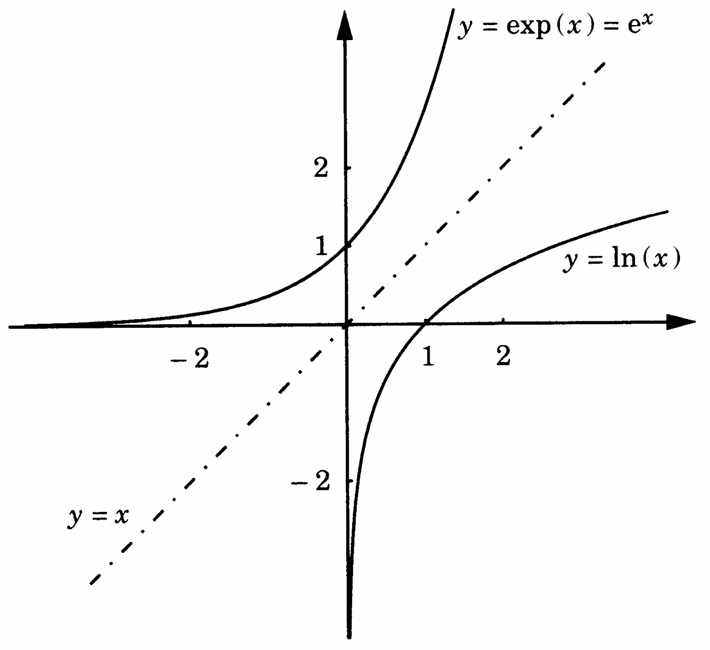
$\boxed{\log_{10} 1 = 0}$ et $\boxed{\log_{10} 10 = 1}$

$\boxed{\ln 1 = 0}$ et $\boxed{\ln e = 1}$

Preuve :

$\log_{10} 1 = 0$ car $10^0 = 1$ et $\log_{10} 10 = 1$ car $10^1 = 10$
$\ln 1 = 0$ car $e^0 = 1$ et $\ln e = 1$ car $e^1 = e$

Graphique :



Propriétés :

1) $\log_{10} 1 = 0$ $\quad\log_{10} 10 = 1$	1) $\ln 1 = 0$ $\quad\ln e = 1$
2) $\log_{10}\left(10^x\right) = x$ $\quad 10^{\log_{10} x} = x$	2) $\ln\left(e^x\right) = x$ $\quad e^{\ln x} = x$
3) $\log_{10}(u \cdot v) = \log_{10} u + \log_{10} v$	3) $\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$
4) $\log_{10} \frac{1}{x} = -\log_{10} x$	4) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
5) $\log_{10} \frac{u}{v} = \log_{10} u - \log_{10} v$	5) $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$
6) $\log_{10}(u^v) = v \cdot \log_{10} u$	6) $\ln(u^v) = v \cdot \ln u$

♥♥♥

Exemples :

a) $\log_{10}(5) + \log_{10}(20) = ...$

b) $\log_{10}(0,001) = ...$

c) $\log_{10}(30'000) - \log_{10}(300) = ...$

d) $\log_{10}(100'000^2) = 2 \cdot \log_{10}(.....................) =$

e) $(\ln 10) \cdot (\log e) =$

Exercice :

Calculer :

4.2 Première application – Calcul de grandeurs incommensurables

L'idée est d'utiliser la réciprocité de l'exponentielle en base 10 et du logarithme en base 10. Ainsi l'écriture scientifique devient possible pour des calculs aboutissant à des nombres très très grands ou très très petits.

Exemple :
On veut calculer $A = 2^{1000}$.
Ce calcul n'est pas possible avec une calculatrice usuelle, on peut alors effectuer :

$$A = 10^{\log_{10} 2^{1000}} \quad \Leftrightarrow \quad A = 10^{1000 \cdot \log 2} \quad \Leftrightarrow \quad A \approx 10^{301,0299957} = 10^{301+0,0299957} = 10^{0,0299957} \cdot 10^{301} \approx 1,07 \cdot 10^{301}$$

Exercice :
1) Calculer $T = 321^{4232}$

2) Calculer $R = 0,0033^{3456}$

2) Calculer $Z = \left(598^{778}\right)^2$

4.3 Les équations logarithmiques

Exemple 1 :

$\log_b f(x) = \log_b g(x)$	$\log 4x + \log x = \log 1600$
	$\log(4x \cdot x) = \log 1600$
Réciproque du log	$\log 4x^2 = \log 1600$
$f(x) = g(x)$	$4x^2 = 1600$
	$x^2 = 400$
	$x = \pm 20$

Finalement la solution $x = -20$ est à rejeter car $\log x$ pour $x \leq 0$ n'est pas défini et on obtient :

$$S = \{+20\}$$

Exemple 2 :

$\log_b f(x) = g(x)$	$\log x + \log(x-3) = 1$
	$\log(x \cdot (x-3)) = 1$
$f(x) = b^{g(x)}$	$x \cdot (x-3) = 10^1$
	$x^2 - 3x - 10 = 0$
	$(x-5)(x+2) = 0$

On a deux solutions $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$. En rejetant la 2ème, on obtient : $S = \{5\}$

Exercices :

Résoudre les équations suivantes :

1) $\log 3x + \log x = \log 2700$

2) $\log(x+1) + \log x = \log 6$

4.4 Les équations exponentielles

Forme générale :

$$\boxed{a^{f(x)} = b^{g(x)}} \quad \text{avec : } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0 \text{ et } b \neq 0$$

Méthode de résolution :
On peut toujours résoudre une équation exponentielle en faisant usage des logarithmes ; dans certains cas on peut résoudre une telle équation plus rapidement, sans recourir aux logarithmes.

Exemple :
On veut résoudre l'équation : $\boxed{4^{6x-16} - 16^x = 0}$
On écrit :

$$4^{6x-16} = 16^x$$

1ère méthode : (sans log)

$$4^{6x-16} = 16^x$$
$$4^{6x-16} = \left(4^2\right)^x$$
$$4^{6x-16} = 4^{2x}$$
$$6x - 16 = 2x$$
$$4x = 16$$
$$x = 4$$

Donc : $\boxed{S = \{4\}}$

2ème méthode : (avec log)

$a^{f(x)} = b^{g(x)}$
$\log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$
$f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$
on obtient une équation algébrique :

$4^{6x-16} = 16^x$
$\log 4^{6x-16} = \log 16^x$
$(6x - 16) \cdot \log 4 = x \cdot \log 16$
$6 \cdot (\log 4) \cdot x - 16 \log 4 - (\log 16)x = 0$
$(6 \log 4 - \log 16) \cdot x = 16 \log 4$

$$x = \frac{16 \log 4}{6 \log 4 - \log 16} = \frac{16 \log 4}{6 \log 4 - \log 4^2} = \frac{16 \log 4}{6 \log 4 - 2 \log 4} = \frac{16}{6 - 2} = 4$$

Donc : $\boxed{S = \{4\}}$

Exercices :
Résoudre les équations suivantes :
1) $4^{7x-16} - 6^x = 0$

2) $9^{4x+5} - 3^{6x-15} = 0$

3) $7^{6x+15} + 49^{5x} = 0$

<u>4.5 La croissance du capital - Le calcul de la durée</u>

On a vu au début de ce chapitre que la valeur future $C(n)$ d'un capital initial C_0 placé à un taux d'intérêt périodique I pour une durée de n périodes est donnée par la formule :

$$C(n) = C_0(1+I)^n$$

Pour exprimer la durée à partir de cette équation on applique le logarithme naturel (par exemple) des deux côtés de l'égalité. L'utilisation des propriétés des logarithmes permet de conclure.

<u>Exemple</u> :

Pendant combien de temps il faut placer un capital de 1'000 Fr. à un taux de 10% pour obtenir 1'610,51 Fr. ?

4.6 Exercices

Exercice 1 :
Calculer avec 3 chiffres significatifs :

a) $0{,}12^{432145}$
b) $\sqrt[32]{0{,}12^{123456}}$

Exercice 2 :
Résoudre les équations suivantes :

a) $5^{x-1} = 25^{3-x}$
b) $5^{x-1} = 7^{3-x}$
c) $2^{3+x} \cdot 3^{2-x} = 5^{7+x} \cdot 7^{x-5}$
d) $10^{x+2} = 5$
e) $\log(x+2) = 2$
f) $\log(x-1) = \log(x-2) + \log(1-x)$
g) $\ln\frac{1}{x-1} = -\ln(x+2) + \ln\frac{1}{1-x}$

Exercice 3 :
Calculer :

$$\frac{\sqrt[3]{421^{9000}}}{421^{10}}$$

Exercice 4 :
Pendant combien de temps faut-il placer un capital de 1'500 Fr. à un taux de 3½ % pour obtenir 4'500 Fr. ?

Exercice 5 :
Résoudre :

1) $\log(7x) = 4$
2) $2\ln(x^3) - 20\ln(x^2) + 6\ln x + 7 = 0$
3) $2 \cdot 8^x - 16 \cdot 4^x = 0$
4) $3^{2x-1} \cdot 5^{3x+2} = 2^{7-x} \cdot 7^{2+x}$
5) $\ln(3x) = \log(3x)$

Exercice 6 :
Un échantillon radioactif a une activité initiale de 2'800 des/sec.
Sachant que la constante de cet échantillon vaut 0,06 :

a) Calculer la **demi-vie** de cet échantillon. C'est-à-dire au bout de combien de temps son activité aura-t-elle diminué de moitié ?
b) Et quand sera-t-elle 10 fois moins importante ?
c) Et quand sera-t-elle 1000 fois moins importante ?

Exercice 7 :
Pendant combien de temps faut-il placer un capital de 2'500 Fr. à un taux de 4 ¾ % pour obtenir 5'000 Fr. ?

Exercice 8 :

Calculer la solution exacte, en utilisant les logarithmes décimaux, et une approximation à deux décimales près de chaque solution, lorsque cela est possible.

1) $3^{x+4} = 2^{1-3x}$
2) $2^{2x-3} = 5^{x-2}$
3) $2^{-x} = 8$
4) $\log x = 1 - \log(x-3)$
5) $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 2 + \log(x-2)$

Exercice 9 :

Résoudre : a) $2^x = \log x$ b) $\dfrac{1}{2^x} = \log x$

Exercice 10 :

On a observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double chaque jour.

a) S'il y a au départ 500 bactéries, que t est le temps en jours et que $f(t)$ est le nombre de bactéries au temps t, donner la loi pour $f(t)$.
b) Au bout de combien de temps la population sera de 10'000 bactéries ?

Exercice 11 :

Résoudre l'équation sans utiliser de calculatrice.

1) $\log(x^2) = (\log x)^2$
2) $\log(\log x) = 2$
3) $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$
4) $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$
5) $\log\sqrt{x^3 - 9} = 2$
6) $\log(x^3) = (\log x)^3$

Exercice 12 :

Calculer la solution exacte, en utilisant les logarithmes décimaux, et une approximation à deux décimales près de chaque solution, lorsque cela est possible.

1) $4^{2x+3} = 5^{x-2}$
2) $3^{2-3x} = 4^{2x+1}$
3) $2^{-x^2} = 5$
4) $\log(5x+1) = 2 + \log(2x-3)$
5) $\log(x-4) - \log(3x-10) = \log(1/x)$

Exercice 13 :

Calculer la solution exacte et une approximation à deux décimales près de chaque solution, lorsque cela est possible.

1) $15 = 4 \cdot 10^{5-x}$
2) $3^{2x} = 81^{5-x}$
3) $5^{x-2} = e^{7+x}$
4) $\log(5x) + \log(2x) = \log(49'000)$
5) $\log(3x^2) - \log(x) = \log(x+2)$
6) $2\ln(x^5) - 4\ln(x^2) - 12 = 0$

<u>Exercice 14</u> : (facultatif)
Soit P la fonction polynôme de la variable réelle x, définie par:

$$P(x) = 2x^3 - 15x^2 + 6x + 7$$

1) a) Calculer $P(1)$, puis écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
   b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

2) Résoudre, en utilisant 1), les équations d'inconnues x suivantes :
   a) $2(\ln x)^3 - 15(\ln x)^2 + 6\ln x + 7 = 0$
   b) $2 \cdot 8^x - 15 \cdot 4^x + 6 \cdot 2^x + 7 = 0$

<u>Exercice 15</u> : (facultatif)
Calculer la solution exacte, en utilisant les logarithmes décimaux, et une approximation à deux décimales près de chaque solution, lorsque cela est possible.

1) $5^x + 125 \cdot 5^{-x} = 30$
2) $3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 28$
3) $4^x - 3 \cdot 4^{-x} = 8$
4) $2^x - 6 \cdot 2^{-x} = 6$

<u>Solutions</u>

<u>Page 6-7</u> : 1) 2,8 ; 2) –25/2 ; 3) ; impossible

<u>Ex 1</u> : a) $6{,}02 \cdot 10^{-397928}$ *; b)* $3{,}03 \cdot 10^{-3553}$

<u>Ex 2</u> : a) $x = \dfrac{7}{3}$ *; b)* $x \approx 2{,}09$ *; c)* $x \approx 0{,}69$ *; d)* $x \approx -1{,}30$ *; g) pas de sol.*

<u>Ex 3</u> : $4{,}009 \cdot 10^{7846}$

<u>Ex 4</u> : 31,935 ans = 31 ans 11 mois 8 jours

<u>Ex 5</u> : 1) 10'000/7=1428,57 ; 2) $e^{1/4} \approx 1{,}28$ *; 3)* $x = 3$ *; 4)* $x \approx 1{,}15$ *; 5)* $x = \dfrac{1}{3}$

<u>Ex 6</u> : a) 11,55 ans ; b) 38,38 ans ; c) 115,13 ans

<u>Ex 7</u> : 14,963 ans = 14 ans 11 mois 7 jours

<u>Ex 8</u> : 1) $x = \dfrac{\log(2/81)}{\log 24} \approx -1{,}16$ *; 2)* $x = \dfrac{\log(8/25)}{\log(4/5)} \approx 5{,}11$ *; 3)* -3 *; 4) 5 ; 5)* $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{101}{11}} \approx 2{,}02$

<u>Ex 9</u> : a) $S = \varnothing$ *; b)* $x \approx 1{,}9$

<u>Ex 10</u> : a) $f(t) = 500 \cdot 2^t$ *; b)* $t = 4{,}32$ *jours = 4 jours 7 heures 40 minutes*

<u>Ex 11</u> : 1) 1 ou 100 ; 2) 10^{100} *; 3) 10'000 ; 4) 1 ou 10'000 ; 5)* $\sqrt[3]{10'009}$ *; 6) 1 ou* $10^{\sqrt{3}}$

<u>Ex 12</u> : 1) $x = \dfrac{\log(1/1600)}{\log(16/5)} \approx -6{,}34$ *2)* $x = \dfrac{\log(9/4)}{\log(432)} \approx 0{,}13$ *3) pas de sol.*
4) $x = \dfrac{301}{195}$ *5)* $x = 5$

<u>Ex 13</u> : 1) $x = 5 - \log\left(\dfrac{15}{4}\right) \approx 4{,}43$; *2)* $x = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}33$; *3)* $x = \dfrac{7 + \ln(25)}{\log(5) - 1} \approx 16{,}77$
4) $x = 70$; *5)* $x = 1$; *6)* $x = e^6 \approx 403{,}43$

<u>Ex 15</u> : 1) 1,2 ; 3) $\dfrac{\log(4 + \sqrt{19})}{\log 4} \approx 1{,}53$