

Probabilités**§1 Notations****Notations:**

E :	Événement
\bar{E} :	Événement contraire à E
$E \cup F$:	E ou F (ou les deux), correspond à l'union
$E \cap F$:	E et F, correspond à l'intersection
U :	L'univers contient tous les événements possibles

Exemple :

Je lance un dé.

$E =$ « Il est tombé sur 5 »

$F =$ « Il est tombé sur un multiple de 3 »

$G =$ « Il est tombé sur un nombre pair »

$U =$ tous les résultats issus du lancé d'un dès = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }

$\bar{E} =$ Il n'est pas tombé sur 5 = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 }

$\bar{F} =$ Il n'est pas tombé sur un multiple de 3 = { 1 ; 2 ; 4 ; 5 }

$\bar{G} =$ Il est tombé sur un nombre impair = { 1 ; 3 ; 5 }

$E \cup F =$ Il est tombé sur 5 ou sur un multiple de 3 = { 3 ; 5 ; 6 }

$E \cup G =$ Il est tombé sur 5 ou sur un nombre pair = { 2 ; 4 ; 5 ; 6 }

$F \cup G =$ Il est tombé sur un multiple de 3 ou sur un nombre pair = { 2 ; 3 ; 4 ; 6 }

$E \cap F =$ Il est tombé sur 5 et sur un multiple de 3 = { }

$E \cap G =$ Il est tombé sur 5 et sur un nombre pair = { }

$F \cap G =$ Il est tombé sur un multiple de 3 ou sur un nombre pair = { 6 }

Exercice 1 :

Je lance deux dés.

$E =$ « La somme fait 6 »

$F =$ « Le premier dé est tombé sur 4 »

$G =$ « La somme est plus grande que 10 »

$\bar{E} =$ La somme ne fait pas 6

$\bar{F} =$ Le premier dé n'est pas tombé sur 4

$\bar{G} =$ La somme est plus petite ou égale à 10

$E \cup F =$ La somme fait 6 ou le premier dé est tombé sur 4

$E \cup G =$ La somme fait 6 ou la somme est plus grande que 10

$F \cup G =$ Le premier dé est tombé sur 4 ou la somme est plus grande que 10

$E \cap F =$ La somme fait 6 et le premier dé est tombé sur 4 = { (4 ; 2) }

$E \cap G =$ La somme fait 6 et la somme est plus grande que 10 = { }

$F \cap G =$ Le premier dé est tombé sur 4 et la somme est plus grande que 10 = { }

§2 Définition de la probabilité

Définition :

La probabilité d'un événement E peut être définie intuitivement par la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{" nombre de cas favorables "}}{\text{" nombre de cas possibles "}}$$

Remarques :

On a :

- $\left. \begin{array}{l} P(E) \leq 1 \\ P(E) \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0 \leq P(E) \leq 1$
- Si E est un événement **CERTAIN** $\Leftrightarrow P(E) = 1$
- Si E est un événement **IMPOSSIBLE** $\Leftrightarrow P(E) = 0$

Théorème 1 :

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

Remarque :

On a évidemment : $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ et $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

Exemple 1 :

On lance une pièce de monnaie. E = elle tombe sur PILE
Calculer P(E).

$$U = \{ P ; F \} \quad (2 \text{ cas})$$

$$E = \{ P \} \quad (1 \text{ cas})$$

$$P(E) = 1 / 2 = 0,5 = 50 \%$$

Exemple 2 :

On lance deux dés, quelle est la probabilité d'obtenir un total de 5 ?

$$U = \{ (1;1) ; (1;2) ; \dots (6;6) \} \quad (36 \text{ cas possibles})$$

$$E = \{ (1;4) ; (4;1) ; (2;3) ; (3;2) \} \quad (4 \text{ cas possibles}) \quad P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,1\bar{1} \approx 11,1\%$$

Exemple 3 :

a) $P(\text{Gagner}) = 30 \%$ alors $P(\text{Perdre}) = 70 \%$

b) $P(E) = \frac{3}{4}$ alors $P(\bar{E}) = \frac{1}{4}$

c) $P(E) = 0,45$ alors $P(\bar{E}) = 0,55$

d) On lance deux dés, quelle est la probabilité de ne pas obtenir un total de 5 ?

(voir exemple 2) $1 - 25\% = 75\%$

Exemple 4 :

On lance 3 pièces de monnaie, quelle est la probabilité qu'elles tombent les trois sur PILE ?

$U = \{ PPP ; PPF ; \dots \}$ (8 cas possibles)

$E = \{ PPP \}$

$P(E) = 1 / 8 = 0,125 = 12,5 \%$

Exercice 2 :

Je lance deux pièces.

E = "Elles tombent les deux sur PILE"

F = "Elles tombent les deux sur FACE"

G = "Une pièce est sur PILE et l'autre sur FACE"

H = "Il y a au moins une pièce qui est tombée sur PILE"

Calculez la probabilité de chaque événement.

$U = \{ PP ; PF ; FF ; FP \}$ (4 cas possibles)

$P(E) = 1 / 4$ $P(F) = 1 / 4$ $P(G) = 2 / 4 = 1 / 2$

$P(H) = 3 / 4$

Exercice 3 :

Je lance trois pièces.

E = "Elles tombent les trois sur PILE"

F = "Elles tombent les trois sur FACE"

G = "Une seule pièce est tombée sur PILE"

H = "Il y a autant de PILE que de FACE"

I = "Il y a au moins une pièce qui est tombée sur PILE"

J = "Il y a exactement une pièce qui est tombée sur PILE"

Calculez la probabilité de chaque événement.

$U = \{ PPP ; PPF ; \dots \}$ ($2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cas possibles)

$P(E) = 1 / 8$

$P(F) = 1 / 8$

$G = \{ PFF ; FPF ; FFP \}$ $P(G) = 3 / 8$

H est impossible à réaliser ; $H = \{ \}$ $P(H) = 0$

$I = \{ PFF ; FPF ; FFP ; PPF ; PFP ; PPP \}$ $P(I) = 7/8$ ou $P(I) = 1 - P(FFF) = 1 - 1/8 = 7/8$

$J = \{ PFF ; FPF ; FFP \}$ $P(J) = 3 / 8$

Exercice 4 :

Je lance quatre pièces.

($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ cas possibles)

E = "Elles tombent les quatre sur PILE" = { PPPP }

F = "Elles tombent les quatre sur FACE" = { FFFF }

G = "Une seule pièce est tombée sur PILE" = { PFFF ; FPFF ; FFPF ; FFFP }

H = "Il y a autant de PILE que de FACE" = { PPFF ; FFPP ; FFPF ; PFPF ; PFFP ; FPPF }

I = "Il y a au moins une pièce qui est tombée sur PILE"

J = "Il y a exactement une pièce qui est tombée sur PILE" = { PFFF ; FPFF ; FFPF ; FFFP }

Calculez la probabilité de chaque événement.

$P(E) = 1 / 16$

$P(F) = 1 / 16$

$P(G) = 4 / 16 = 1 / 4$

$P(H) = 6 / 16 = 3 / 8$

$P(I) = 1 - 1/16 = 15/16$

$P(J) = 4 / 16 = 1 / 4$

Exercice 5 :

Je lance un dé

E = "Il est tombé sur 4"

F = "Il est tombé sur un nombre pair"

G = "Il est tombé sur un multiple de 3"

H = "Il est tombé sur un nombre plus grand que 2"

Calculez la probabilité de chaque événement.

$$P(E) = 1 / 6$$

$$P(F) = 3 / 6 = 1 / 2$$

$$P(G) = 2 / 6 = 1 / 3$$

$$P(H) = 4 / 6 = 2 / 3$$

Exercice 6 :

Je lance deux dés

E = "La somme fait deux"

F = "La somme fait 6"

G = "La somme est différente de 11"

H = "Le premier dé est tombé sur 3"

Calculez la probabilité de chaque événement.

36 cas possibles

$$E = \{ (1;1) \}$$

$$F = \{ (2;4) ; (4;2) ; (3;3) ; (1;5) ; (5;1) \}$$

$$\text{La somme fait 11} = \{ (5;6) ; (6;5) \}$$

6 cas possibles

$$P(E) = 1 / 36$$

$$P(F) = 5 / 36$$

$$P(G) = 34 / 36 = 17 / 18$$

$$P(H) = 6 / 36 = 1 / 6$$

Exercice 7 :

Je lance trois dés.

E = "La somme fait deux"

F = "La somme fait 6"

Calculez la probabilité de chaque événement,

216 cas possibles

impossible

$$F = \{ (1;1;4) \text{ 3 cas ; } (2;2;2); (3;2;1) \text{ 6 cas } \}$$

$$P(E) = 0$$

$$P(F) = 10 / 216$$

§3 Théorème de la multiplication

Théorème 2 :

$$P(A \text{ se réalise puis } B \text{ se réalise}) = P(A) \cdot P(B \text{ sachant que } A \text{ s'est réalisé})$$

Exemple 1 :

a) On tire deux cartes, avec remise, d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité de tirer deux AS ?

$$4 / 36 \cdot 4 / 36 = 16 / 1296 \approx 1,23 \%$$

b) On tire deux cartes sans remise d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité de tirer deux AS ?

$$4 / 36 \cdot 3 / 35 = 12 / 1260 \approx 0,95 \%$$

Exemple 2 :

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.
 Quelle est la probabilité qu'elle tombe trois fois sur PILE ?

$$1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8 = 12,5 \%$$

Exercice 8 :

Soit une urne contenant 5 boules rouges et 15 boules blanches.
 Je tire une boule au hasard.
 E = "La boule est rouge"
 F = "La boule est blanche"
 Calculez la probabilité de chaque événement.

$$P(E) = 5 / 20 = 1 / 4 = 25 \% \qquad P(F) = 15 / 20 = 75 \%$$

Exercice 9* :

Soit une urne contenant 5 boules rouges et 15 boules blanches.
 Je tire deux boules au hasard.
 E = "Les boules sont rouges"
 F = "Les boules sont blanches"
 G = "Les boules sont de couleur différentes"
 H = "Les boules sont de la même couleur"
 Calculez la probabilité de chaque événement.

$$P(E) = 5 / 20 \cdot 4 / 19 = 1 / 19 = 5,26 \%$$

$$P(F) = 15 / 20 \cdot 14 / 19 = 21 / 38 = 52,2 \%$$

$$P(G) = 2 \cdot \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \right) = \frac{15}{19} = 39,5 \%$$

$$P(H) = P(E) + P(F) = 23 / 38 = 60,5 \%$$

Exercice 10* :

Soit une urne contenant 5 boules rouges, 4 boules noires et 11 boules blanches.
 Je tire quatre boules au hasard.
 E = "Les boules sont rouges"
 F = "Les boules sont blanches"
 G = "Les boules sont de couleur différentes"
 H = "J'ai tiré deux boules blanches et deux boules noires"
 J = "Il n'y a pas de boule noire parmi les boules que j'ai tirées"
 Calculez la probabilité de chaque événement.

$$P(E) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{2}{17} = \frac{1}{969} = 0,00103$$

$$P(F) = \frac{11}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} \cdot \frac{8}{17} = \frac{22}{323} = 0,06811$$

G est impossible à réaliser donc : $P(G) = 0$

$$P(H) = 6 \cdot \left(\frac{11}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17} \right) = \frac{22}{323} = 0,06811 \qquad \text{(6 car on compte les permutations BBNN)}$$

$$J = \text{Rouges et blanches uniquement} \qquad P(J) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \cdot \frac{13}{17} = \frac{364}{969} = 0,37564$$

Exercice 11 :

Soit un jeu de 36 cartes. Je tire une carte au hasard.

E = "C'est un Valet"

F = "La carte est rouge"

G = "La carte tirée est une dame noire"

H = "La carte tirée n'est pas un As"

Calculez la probabilité de chaque événement.

$$P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad P(F) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad P(G) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad P(H) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Exercice 12* :

Soit un jeu de 36 cartes. Je tire 5 cartes au hasard.

E = "Les cartes tirées sont des piques"

F = "Les cartes tirées sont rouges"

G = "Il y a au moins 1 pique parmi les cartes tirées"

H = "J'ai tiré deux piques et trois cartes rouges"

I = "Toutes les cartes sont des AS"

Calculez la probabilité de chaque événement.

$$P(E) = \frac{9}{36} \cdot \frac{8}{35} \cdot \frac{7}{34} \cdot \frac{6}{33} \cdot \frac{5}{32} = \frac{1}{2992} = 0,00033422 \quad (\text{ou } P(E) = \frac{C_5^9}{C_5^{36}} = 0,03\%)$$

$$P(F) = \frac{18}{36} \cdot \frac{17}{35} \cdot \frac{16}{34} \cdot \frac{15}{33} \cdot \frac{14}{32} = \frac{1}{44} = 0,0227 \quad (\text{ou } P(F) = \frac{C_5^{18}}{C_5^{36}} = 2,27\%)$$

$$P(G) = 1 - P(\text{pas de pique}) = 1 - \frac{27}{36} \cdot \frac{26}{35} \cdot \frac{25}{34} \cdot \frac{24}{33} \cdot \frac{23}{32} = 78,5\% \quad (\text{ou } P(G) = 1 - \frac{C_5^{27}}{C_5^{36}} = 78,5\%)$$

$$P(H) = \left(\frac{9}{36} \cdot \frac{8}{35} \cdot \frac{18}{34} \cdot \frac{17}{33} \cdot \frac{16}{32} \right) \cdot \frac{10}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{6}{77} = 7,8\% \quad (\text{ou } P(H) = \frac{C_2^9 \cdot C_3^{18}}{C_5^{36}} = 7,8\%)$$

$P(I) = 0$ (impossible car 4 AS dans le jeu)

Exercice 13 :

Soit une classe composée de 16 élèves. On choisit deux personnes au hasard.

a) Quelle est la probabilité. que Jean et Anne ne soient pas choisis ?

b) Quelle est la probabilité que Jean et Anne soient choisis ?

a) $P(\text{sans Jean et Anne}) = \frac{14}{16} \cdot \frac{13}{15} = 75,8\% \quad (\text{ou } P = \frac{C_2^{14}}{C_2^{16}} = 75,8\%)$

b) $P(\text{Jean et Anne}) = \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{15} \right) \cdot 2 = 0,8\% \quad (\text{ou } P = \frac{1}{C_2^{16}} = 0,8\%)$

Exercice 14 :

Chaque semaine Jean joue à un certain jeu de hasard. (Il joue qu'une fois par semaine). Sachant qu'à chaque fois il a une chance sur 100 de gagner, calculez:

a) La probabilité que sur une année il ne gagne jamais

b) La probabilité qu'il gagne au moins une fois dans l'année.

a) 1 an = 52 semaines Donc : $P(\text{jamais gagner}) = \frac{99}{100} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \left(\frac{99}{100} \right)^{52} \approx 59,3\%$

b) $P(\text{Gagner au moins 1 fois}) = 1 - P(\text{jamais}) \approx 100\% - 59,3\% = 40,7\%$

§3 Théorème de l'union**Théorème 3 :**

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Exemple 1 :

Je lance un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de trois ou un nombre pair ?

$$E = \text{« multiple de 3 »} = \{ 3 ; 6 \}$$

$$F = \text{« nombre pair »} = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$$

$$E \cap F = \{ 6 \}$$

$$P(E \cup F) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Exemple 2 :

Je tire une carte d'un jeu de 36. Quelle est la probabilité de tirer une carte noire ou une habillée ?

16 cartes habillées (valet, dame, roi, as)

$$P(\text{noires} \cup \text{habillées}) = P(\text{noires}) + P(\text{habillées}) - P(\text{noires} \cap \text{habillées})$$

$$= \frac{18}{36} + \frac{16}{36} - \frac{8}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \approx 72,2\%$$

Exemple 3 :

Je lance deux dés. Quelle est la probabilité qu'un des deux dé soit tombé sur 5 ?

$$P(\text{1er dé sur 5}) = \frac{1}{6} \quad P(\text{2e dé sur 5}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{1er dé sur 5} \cap \text{2e dé sur 5}) = P(\text{1er dé sur 5 et 2e dé sur 5}) = \frac{1}{36}$$

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \approx 30,5\%$$

Exercice 15 :

Calculer la probabilité de tirer d'un jeu de carte de 36 un roi ou un cœur.

$$P(\text{Roi}) = \frac{4}{36}$$

$$P(\text{Coeur}) = \frac{9}{36}$$

$$P(\text{Roi et coeur}) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{Roi ou coeur}) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

§4 Situations où les événements ne sont pas équiprobables (cas de dés ou pièces truquées)

On va utiliser principalement les deux théorèmes vus précédemment :

Théorème 1 :

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

Théorème 2 :

$$P(A \text{ se réalise puis } B \text{ se réalise}) = P(A) \cdot P(B \text{ sachant que } A \text{ s'est réalisé})$$

Exercice 16 :

Soit une pièce truquée de la manière suivante:

P(pile)	P(face)
15 %	85 %

Je lance la pièce deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir deux fois FACE ?

$$P(\text{face};\text{face}) = P(\text{face}) \cdot P(\text{face}) = 85\% \cdot 85\% = 0,7225 = 72,25\%$$

Exercice 17 :

Soit une pièce truquée de sorte que PILE sort 4 fois plus souvent que FACE

P(pile)	P(face)
80 % = 4/5	20 % = 1/5

a) Je lance la pièce deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir deux fois PILE ?

$$P(\text{pile};\text{pile}) = P(\text{pile}) \cdot P(\text{pile}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 64\%$$

b) Je lance la pièce deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois FACE ?

$$P(\text{au moins une fois face}) = 1 - P(\text{pile};\text{pile}) = 36\%$$

$$\text{ou } P(\text{face};\text{pile}) + P(\text{pile};\text{face}) + P(\text{face};\text{face}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 36\%$$

Exercice 18 :

Soit un dé truqué de la manière suivante

1	2	3	4	5	6
0,15	0,05	0,2	0,4	0,1	0,1

Je lance le dés deux fois.

a) quelle est la probabilité d'obtenir un total de deux ? $\{(1;1)\}$

$$P(1) \cdot P(1) = 0,15 \cdot 0,15 = 2,25\%$$

b) quelle est la probabilité d'obtenir un total de trois ? $\{(1;2); (2;1)\}$

$$P(1;2) + P(2;1) = P(1) \cdot P(2) + P(2) \cdot P(1) = 2 \cdot P(1) \cdot P(2) = 2 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 1,5\%$$

c) quelle est la probabilité d'obtenir un total de quatre ? $\{(1;3); (3;1); (2;2)\}$

$$2 \cdot P(1) \cdot P(3) + P(2) \cdot P(2) = 2 \cdot 0,15 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,05 = 6,25\%$$

Exercice 19 :

Soit un dé truqué de sorte que les nombres pairs sortent deux fois plus souvent que les impairs

1	2	3	4	5	6
1/9	2/9	1/9	2/9	1/9	2/9

(1/3 pour les pairs et 2/3 pour les impairs)

a) Je lance le dé deux fois quelle est la probabilité d'obtenir un total de deux ?

$$P(1 ; 1) = P(1) \cdot P(1) = 1/9 \cdot 1/9 = 1,23 \%$$

b) Je lance le dé deux fois quelle est la probabilité d'obtenir un total de trois ?

$$P(1 ; 2) + P(2 ; 1) = 2 \cdot 1/9 \cdot 2/9 = 4,94 \%$$

c) Je lance le dé deux fois quelle est la probabilité d'obtenir un total de quatre ?

$$2 \cdot P(1) \cdot P(3) + P(2) \cdot P(2) = 2 \cdot 1/9 \cdot 1/9 + 2/9 \cdot 2/9 = 7,4 \%$$

d) Je lance le dé deux fois quelle est la probabilité de ne pas obtenir un total de 5

{(1;4) ; (4;1) ; (2;3) ; (3;2)}

$$P(\text{obtenir un total de 5}) = 2 \cdot 1/9 \cdot 2/9 + 2 \cdot 2/9 \cdot 1/9 = 9,88 \%$$

$$P(\text{ne pas obtenir un total de 5}) = 100 \% - 9,88 \% = 90,12 \%$$

Exercice 20 :

Le jeu suivant consiste à effectuer les trois opérations ci-dessous l'une après l'autre :

- d'abord tirer une carte d'un jeu de 36,
- ensuite lancer un dé
- et pour finir, lancer une pièce.

On gagne si on obtient le résultat ci-dessous:

AS rouge	3	pile
----------	---	------

Quelle est la probabilité de gagner ?

$$P(\text{AS rouge}, 3, \text{pile}) = P(\text{AS rouge}) \cdot P(3) \cdot P(\text{pile}) = \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{216} = 0,46\%$$