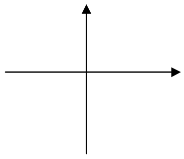
5. Les droites

§ 5.1 Introduction

< *a* ; *b* > est un couple.
On peut placer les couples dans un Système d'axes

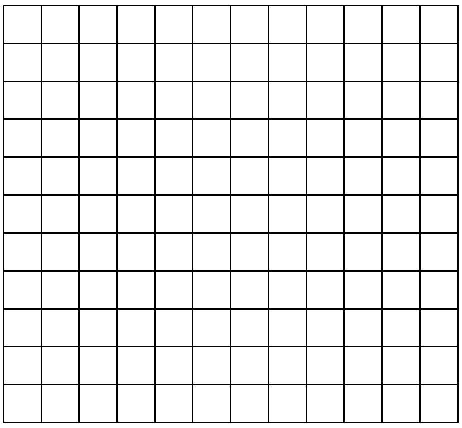


Exercice 1 : placer les couples suivants dans un système d'axes.

A = < 2 ; 3 >

B = < -2 ; 4 >

C = < 1 ; -3 >



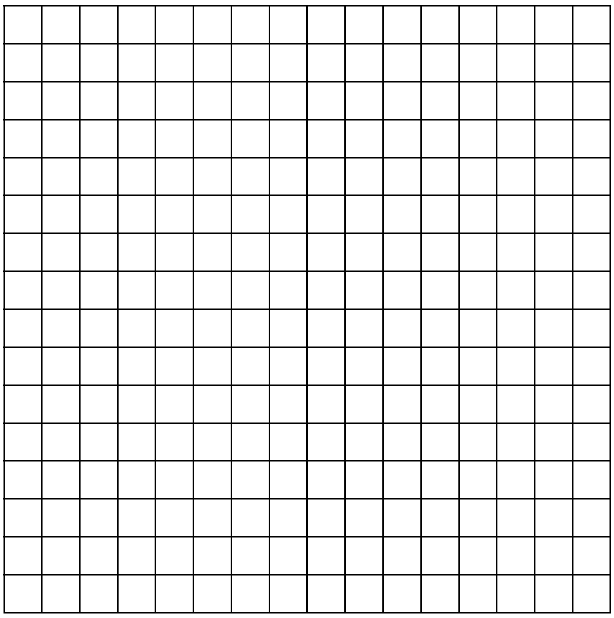
§ 5.2 Equation de la droite

Soit l'équation : $y = 2x - 3$

Cherchons quelques valeurs de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ vérifiant cette équation

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Exercice 2 :
a) Placez ces points < *x* ; *y*> dans un système d'axes.
b) Que constatez-vous ?



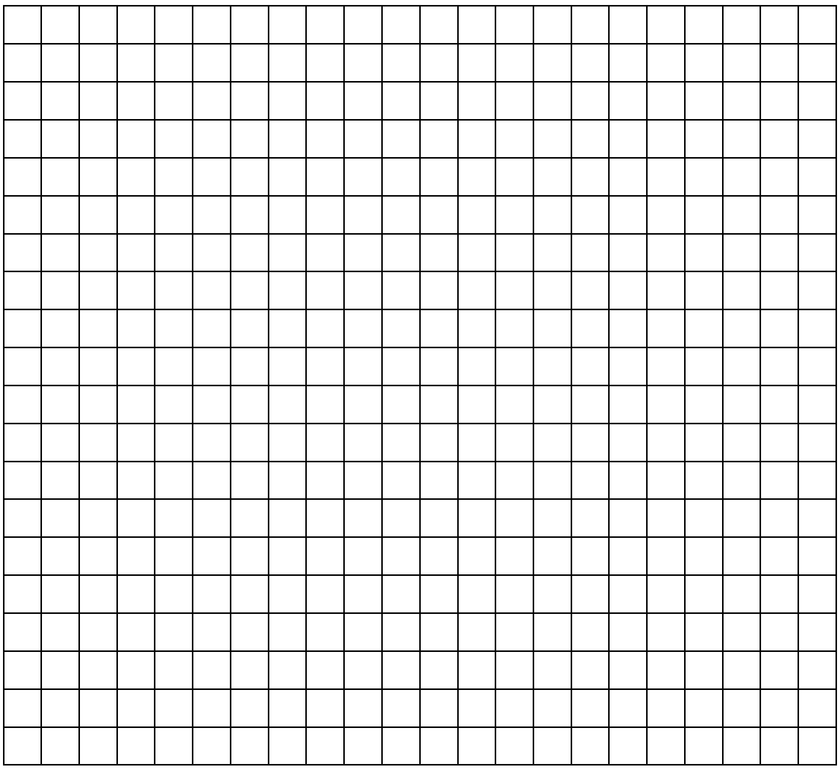
On constate que les points sont **alignés**.
En fait l'ensemble de toutes les **solutions** de l'équation $y = 2x - 3$
est constitué par la **droite** passant par ces points

De manière générale :

<u>Théorème</u>
Toute équation du type $\boxed{y = ax + b}$ avec $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ des nombres fixés admet une droite comme solution.

<u>Exercice 3</u> : Dessinez les droites suivantes (en calculant quelques points)

a) $y = 3x - 5$ b) $y = -2x$ c) $2y - x = 2$ d) $3y + 7x = 0$

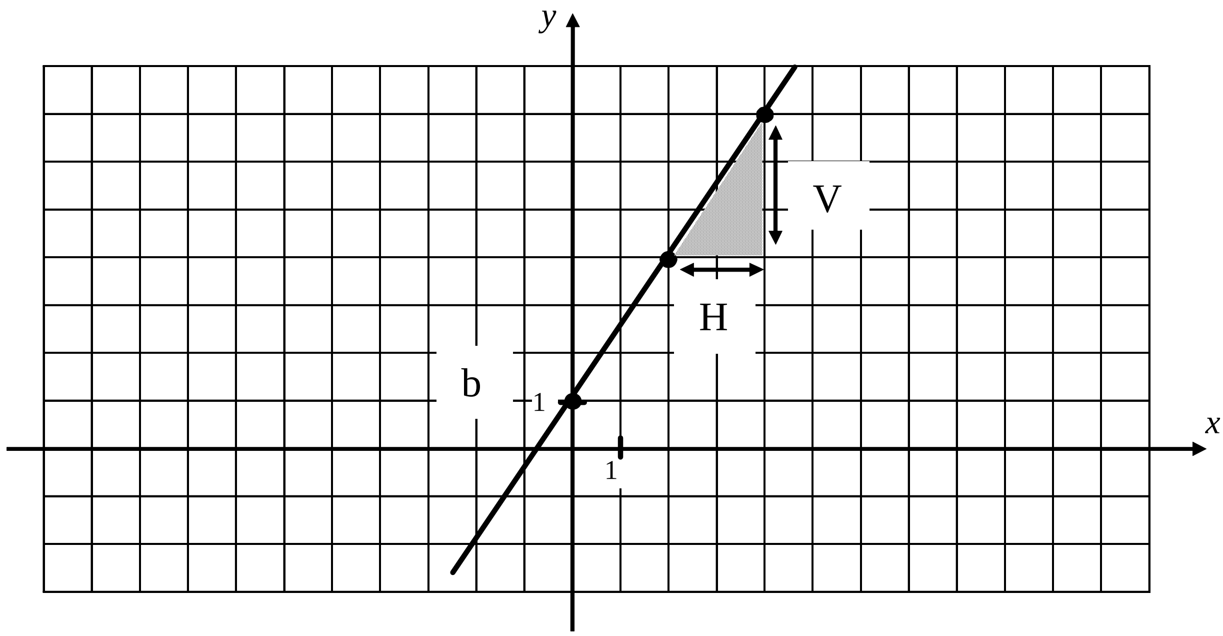


§ 5.3 Pente et ordonnée à l'origine d'une droite

Les droites se caractérisent par deux grandeurs qui sont la pente et l’ordonnée à d’origine.

La pente représente l’inclinaison de la droite et l’ordonnée à l’origine situe cette droite dans le plan.

Exemple :



La pente : $a = \frac{V}{H} = \frac{3}{2}$ L’ordonnée à l’origine : b = 1

Remarque : Le rapport V/H reste constant quelle que soit la taille du triangle !!!!

Définitions :

- La **pente** « a » est donnée par le rapport suivant : $\boxed{a = \frac{V}{H}}$

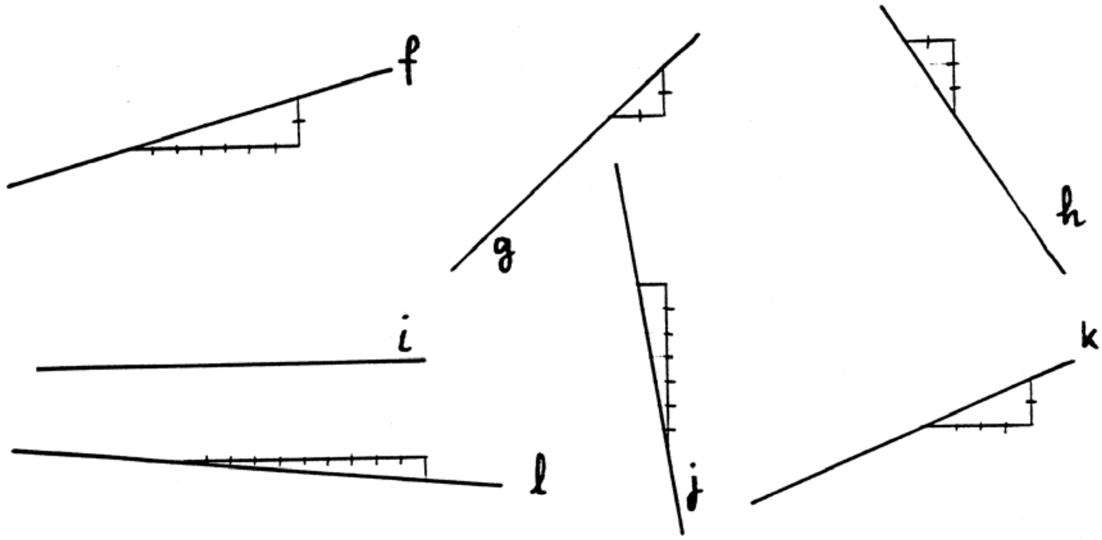
  Trois cas sont possibles pour la pente :

  - Si la pente $a > 0$ la droite est **croissante** ; « elle monte » ;
  - Si la pente $a < 0$ la droite est **décroissante** ; « elle descend »;
  - Si la pente $a = 0$ la droite est **constante** ; elle est horizontale ;

- **L’ordonnée à l’origine** « b » est l’intersection de la droite avec l’axe des ordonnées y.

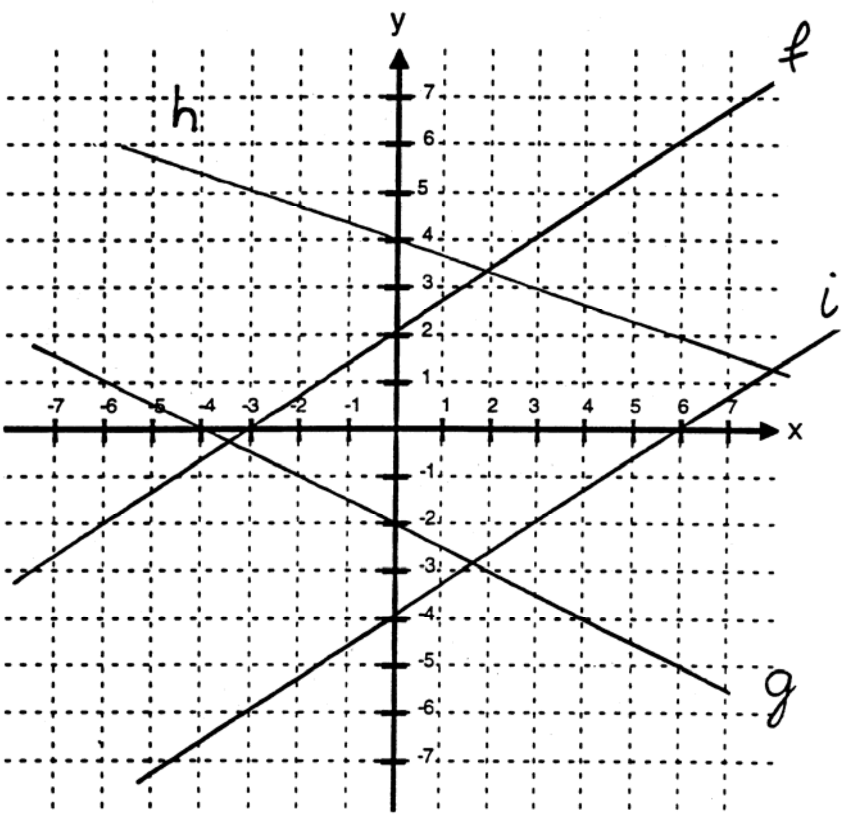
  L'ordonnée à l'origine d'une droite est l'image de zéro.

Exercice 3 :
Quelle est la pente des droites ci-dessous ?



Droite	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*ℓ*
Pente							

Exercice 4 :

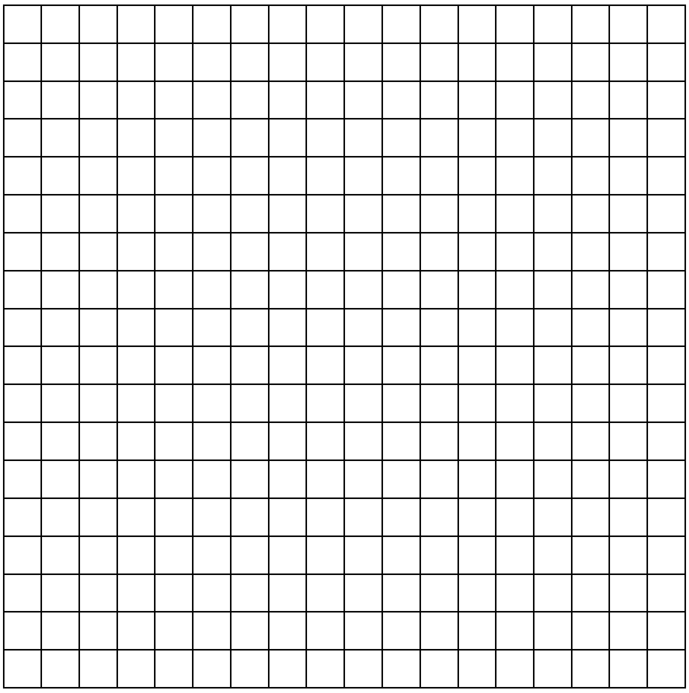


Donner la pente et l'ordonnée à l'origine des droite dessinée dans le repère ci-contre.

	Pente	**Ordonnée à l'origine**
f		
g		
h		
i		

<u>Exercice 5</u> :

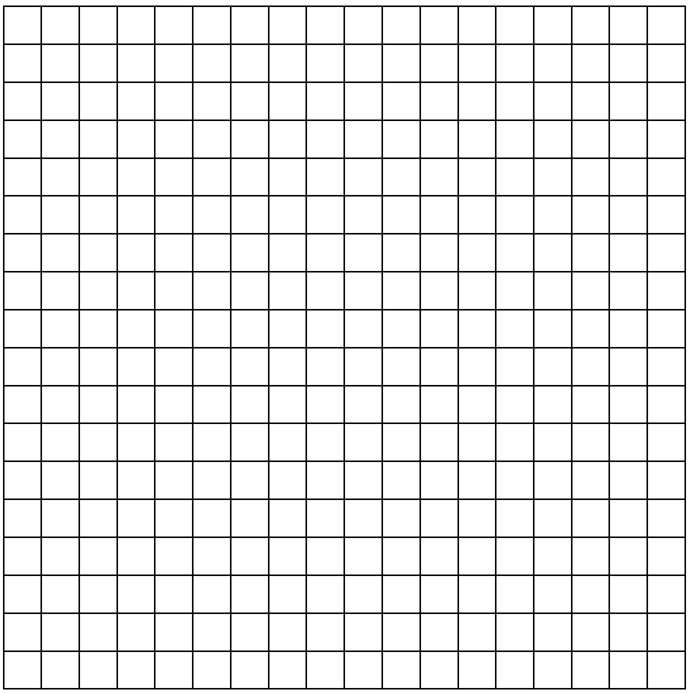
a) Dessiner la droite passant par <-4 ; 1 > et < 2 ; 4 >. Trouver sa pente et son ordonnée à l'origine.
b) Idem avec les points <-4 ; 3 > et < 2 ; 3 >
c) Idem avec les points < 0; 0 > et < -1 ; 4 >
d) Idem avec les points < 0 ; -2 > et < -3 ; -1 >



<u>Exercice 6</u> :

a) Dessiner la droite $y = 2x - 1$ et trouver sa pente ainsi que son ordonnée à l'origine

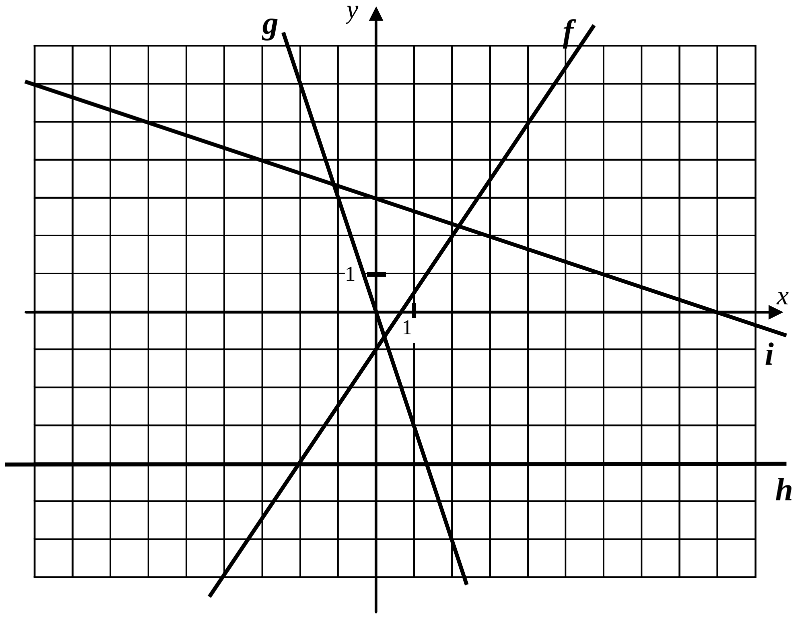
b) Idem avec : $y = -4x - 2$ c) Idem avec : $y = \frac{5x}{4}$ d) Idem avec : $y = -\frac{x}{2} + 3$



Théorème :
Si l'équation d'une droite est donnée par $y = ax + b$
alors ***a*** représente la pente de la droite
b représente l'ordonnée à l'origine de la droite.

Et réciproquement :
Une droite de pente ***a*** ***e***t d'ordonnée à l'origine ***b*** admet $y = ax + b$ pour équation.

Exercice 7 :
Donner l'équation des droites représentées sur le graphique ci-dessous :



f : $y =$ ………..

g : $y =$ ………..

h : $y =$ ………..

i : $y =$ ………..

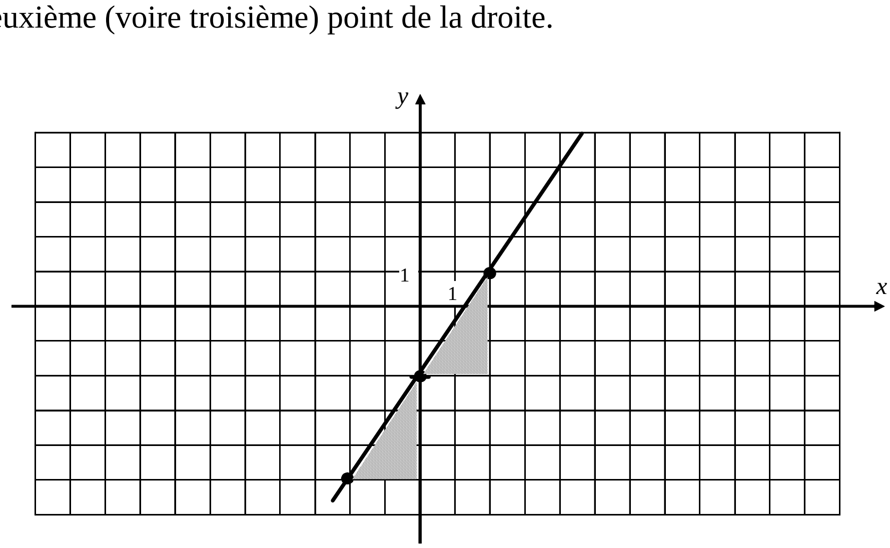
§ 5.4 Comment dessiner une droite rapidement avec son équation ?

Méthode 1 :
En utilisant l'équation de la droite on peut calculer deux points et ensuite tracer la droite.

Méthode 2 :
On place l'ordonnée à l'origine ***b*** et grâce à la pente et en partant de l'ordonnée, on dessine le triangle et on obtient un deuxième (voire troisième) point de la droite.

Exemple :

$y = \frac{3}{2}x - 2$



Exercice 8 :
Représenter graphiquement les droites ci-dessous :

d_1 : $y = \frac{1}{2}x + 5$

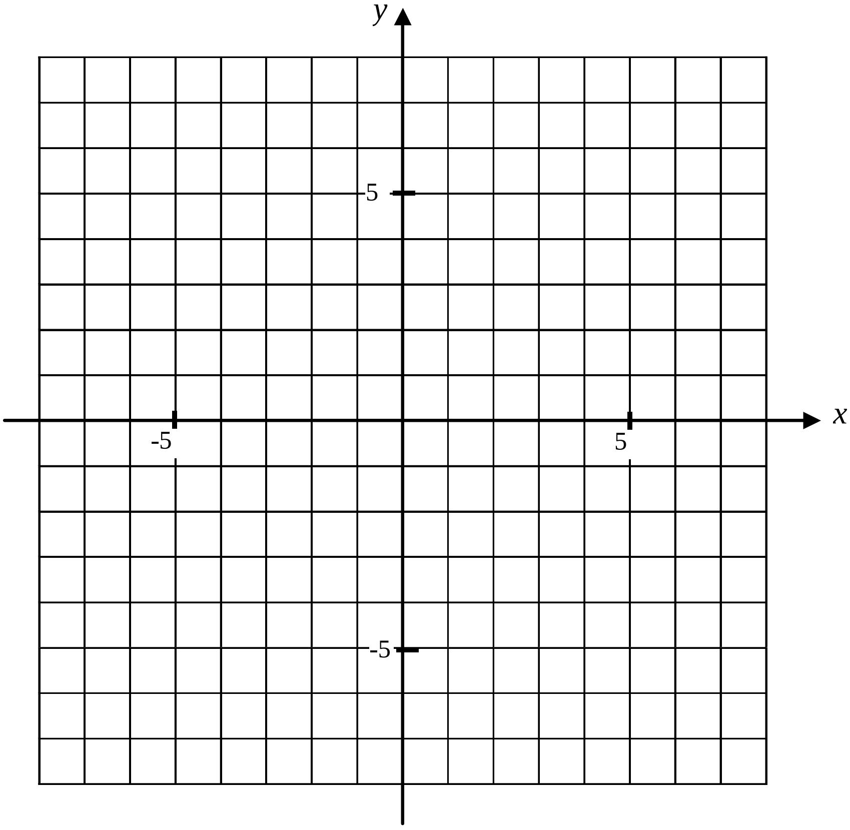
d_2 : $y = -\frac{4}{3}x - 2$

d_3 : $y = -\frac{4}{5}x$

d_4 : $y = \frac{7}{2}x$

d_5 : $y = 4$

d_6 : $y = \frac{2}{3}x - 4$



Exercice 9 :
Représenter graphiquement les droites ci-dessous :

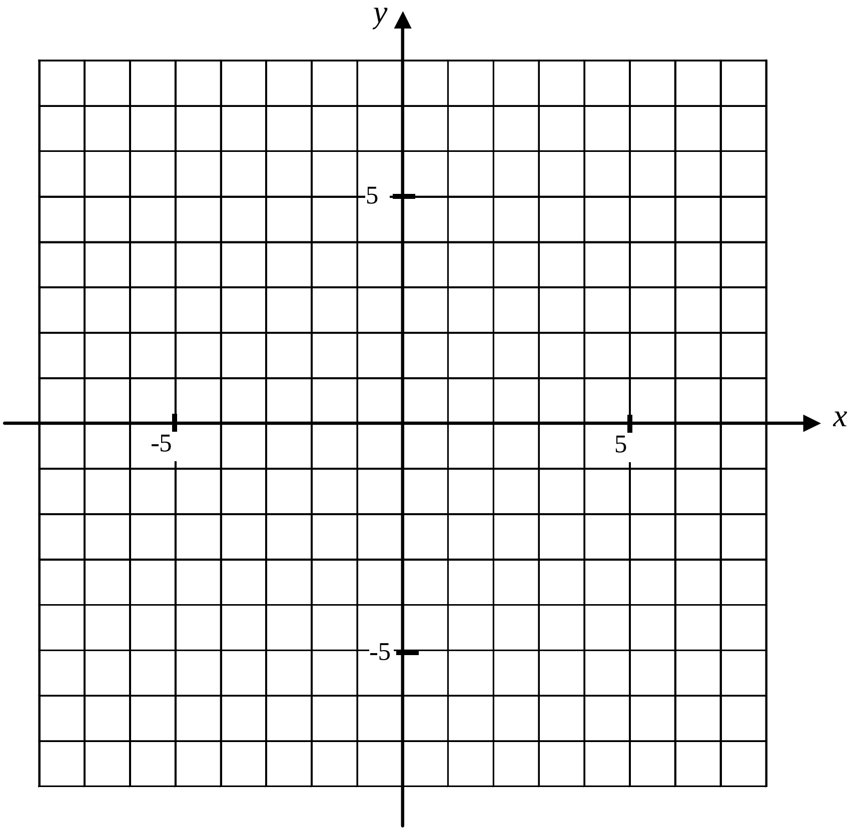
d_1 : $y = \frac{2}{3}x + 2$

d_2 : $y = -\frac{3}{4}x + 5$

d_3 : $y = \frac{3}{5}x$

d_4 : $y = -6$

d_5 : $x = -4$



§ 5.5 Recherche algébrique de l'équation d'une droite passant par deux points

Théorème :
Soit une droite passant par les points $< x_1 ; y_1 >$ et $< x_2 ; y_2 >$ alors

sa **pente** vaut : $\boxed{a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ et son **ordonnée à l'origine** vaut : $\boxed{b = y_1 - a \cdot x_1}$

Finalement son **équation** sera : $y = ax + b$

Exercice 10 : a) Trouver l'équation de la droite passant par < 8 ; 17 > et < 1; 3 >
b) Trouver l'équation de la droite passant par < -8; 11 > et < 64; -61 >
c) Trouver l'équation de la droite passant par < 0 ; -3 > et < -4 ; 0 >

Exercice 11 : a) Trouver l'équation de la droite de pente 2 passant par < 1 ; 8 >
b) Trouver l'équation de la droite de pente 4 passant par < -3 ; 8 >
c) Trouver l'équation de la droite de pente -5 d'ordonnée à l'origine 2

Exercice 12 : Soit le point < 2 ; 20 >
a) Peut-on dire que ce point appartient à la droite d'équation : $y = 10x$?
b) Peut-on dire que ce point appartient à la droite d'équation : $y = 15x + 10$?
c) Peut-on dire que ce point appartient à la droite d'équation : $y = 15x - 10$?
d) Donner l'équation d'une autre droite passant par < 2 ; 20 >

§ 5.6 Problèmes

Pr. 1 : Monsieur Ramel K. dispose actuellement de 600 Fr. d'économies.

A) Sachant que tous les mois il épargne 100 Fr., calculer :

1) Son capital dans 3 mois
2) Son capital dans 6 mois
3) Son capital dans un an
4) Son capital dans 15 mois

B) Compléter le tableau suivant :

Temps (mois)	0	1	2	3	9	10
Capital (Frs)						

C) Représenter graphiquement l'évolution du capital en fonction du temps
D) Trouver l'équation de la droite
E) D'après votre dessin, quelle sera la valeur du capital dans 6 mois ?

Pr 2 : M. Reste J. dispose de 2000 Fr. d'économies mais il est très dépensier.

A) Sachant que chaque mois il prend 200 Fr. sur ses économies, calculer :

1) Son capital dans 3 mois
2) Son capital dans 6 mois

B) Compléter le tableau suivant :

Temps (mois)	0	1	2	3	7	10
Capital (Frs)						

C) Représenter graphiquement l'évolution du capital en fonction du temps
D) Trouver l'équation de la droite
E) D'après votre dessin, dans combien de mois M. Reste n'aura plus que 1000 Frs d'économies ?

Pr. 3: La voiture de M. Rasse T. consomme 8 litres pour faire 100 Km.

A) Sachant que M. Rasse a fait le plein de son réservoir et que celui-ci a une capacité de 50 litres,
calculer :
a) Le contenu du réservoir après 100 km
b) Le contenu du réservoir après 200 km

B) Compléter le tableau suivant :

Distance (km)	0	100	200	500
Réserve (litres)				

C) Représenter graphiquement le contenu du réservoir en fonction de la distance parcourue
D) Trouver l'équation de la droite.

E) D'après votre dessin, quelle distance, M. Rasse, peut-il parcourir avec un plein ?

Pr. 4 : M. Rité V. est chauffeur de taxi.
Son tarif est le suivant : 5 Fr. de prise en charge plus 2 Fr. par kilomètre

A) Calculer : a) Le prix d'une course de 3 kilomètres
b) Le prix d'une course de 8 kilomètres

B) Compléter le tableau suivant :

Distance (km)	1	2	3	4	8	10
Prix (Frs)						

C) Représenter graphiquement le prix de la course en fonction de la distance parcourue.
D) Trouver l'équation de la droite.
E) D'après votre dessin, quel sera le prix d'une course de 6 kilomètres ?
F) D'après votre dessin, quelle distance peut-on parcourir avec 16 Frs ?

Pr. 5 : Soient deux réservoirs **A** et **B**
A contient 900 litres et se remplit à raison de 100 litres à la minute. **B** contient 2000 litres et se vide à raison de 200 litres à la minute.

A) Compléter le tableau ci-dessous :

Temps (mn)	0	1	2	5	10
Contenu du réservoir **A** (litres)					
Contenu du réservoir **B** (litres)					

B) Représenter, sur un même graphique, le contenu de chaque réservoir en fonction du temps
C) D'après votre dessin, dans combien de temps les deux réservoirs contiendront-ils la même quantité ? Quelle sera cette quantité ?
D) Trouver l'équation de chaque droite.
E) Trouver, à l'aide de l'algèbre, les valeurs précises des réponses données en C)

§ 5.7 Droites parallèles, perpendiculaires

Droites parallèles :
Deux droites sont **parallèles** si et seulement si elles ont la **même pente**.

$$\boxed{d_1 // d_2 \Leftrightarrow pente(d_1) = pente(d_2)}$$

Droites perpendiculaires :
Deux droites sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs **pentes sont inverses et opposées** l'une de l'autre.

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow pente(d_1) = -\frac{1}{pente(d_2)}}$$

<u>Exemples</u> :

a) $f : x \mapsto -\frac{1}{4}x+2$ et $g : x \mapsto -\frac{1}{4}x-5$ sont deux droites parallèles. On note : $f \,//\, g$

b) $h : x \mapsto \frac{4}{3}x+2$ et $k : x \mapsto -\frac{3}{4}x-3$ sont deux droites perpendiculaires. On note : $h \perp k$

<u>Exercice 13</u> :

Résoudre graphiquement puis algébriquement :

a) Déterminer l'équation de la droite qui est parallèle à la droite $d_1 : y = \frac{1}{2}x+2$ et qui passe par le point $(3;-5)$.

b) Déterminer l'équation de la droite qui est perpendiculaire à la droite $d_1 : y = -\frac{4}{7}x+2$ et qui passe par le point $(6;-2)$.

c) Déterminer l'équation de la droite qui est perpendiculaire à la droite $y = 3x$ et dont l'ordonnée à l'origine est $\frac{3}{7}$.

<u>Exercice 14</u> :

a) Déterminer l'équation de la droite parallèle à la droite $d_1 : y = 2$ et qui passe par le point $< -166 ; 9 >$.

b) Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à la droite $d_1 : x = -9$ et qui passe par le point $< -3 ; -7 >$.

c) Déterminer l'équation de la droite passant par les points $< 0 ; 2 >$ et $< -4 ; 3 >$.

<u>Exercice 15</u> :

a) Déterminer l'équation de la droite passant par le point $< 7 ; 4 >$ et dont l'ordonnée à l'origine est 5.

b) Déterminer l'équation de la droite dont la pente est $-\frac{7}{5}$ passant par le point $< -2 ; +6 >$.

c) Quelle est l'équation de la droite passant par $< 0 ; 2 >$ et parallèle à la droite $y = 2x+3$.

<u>Exercice 16</u> :

1) Déterminer l'équation de la droite passant par les points $P_1 = < -5 ; -1000 >$ et $P_2 = < 15 ; 0 >$.

2) Les points $P_3 = < 1 ; -700 >$ et $P_4 = < -1 ; 800 >$ appartiennent-ils à cette droite ?
   (justifier à l'aide d'un calcul)

<u>Exercice 17</u> :

1) Quelle est l'équation de la droite $\boldsymbol{f}$ passant par $< 100 ; 100 >$ et par l'origine ?

2) Quelle est l'équation de la droite $\boldsymbol{g}$ perpendiculaire à $\boldsymbol{f}$ et passant par le point $< 18 ; -8 >$?

Solutions

Ex 3 :

Droite	f	g	h	i	j	k	ℓ
Pente	$\frac{2}{7}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	-7	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$

Ex 4 :

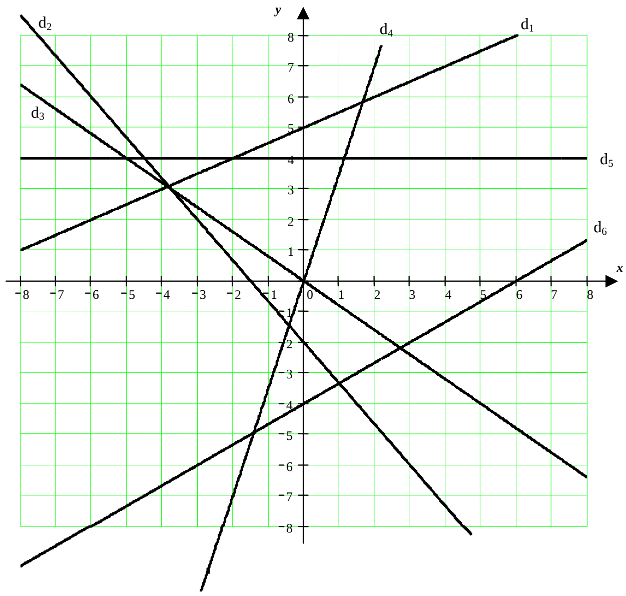
	Pente	Ordonnée à l'origine
f	$\frac{2}{3}$	2
g	$-\frac{1}{2}$	-2
h	$-\frac{1}{3}$	4
i	$\frac{2}{3}$	-4

Ex 5 : a) P = ½ OàO = 3 b) P = 0 OàO = 3
c) P = -4 OàO = 0 d) P = -1/3 OàO = -2

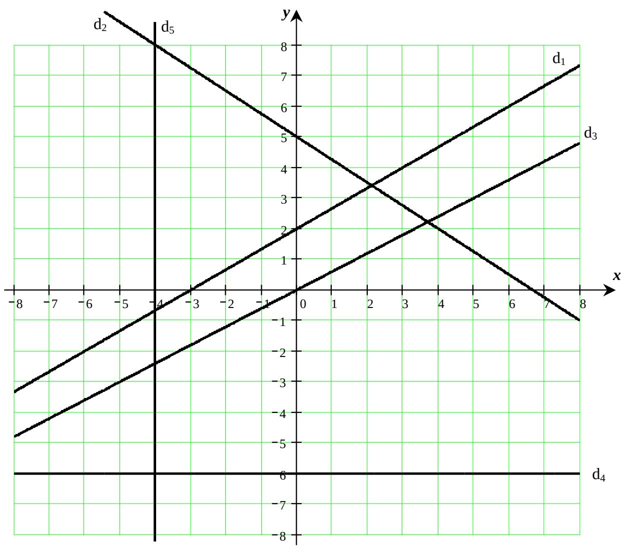
Ex 6 : a) P = 2 OàO = -1 b) P = -4 OàO = -2
c) P = 5/4 OàO = 0 d) P = -1/2 OàO = 3

Ex 7: $f : y = \frac{3}{2}x - 1$ $g : y = -3x$ $h : y = -4$ $i : y = -\frac{1}{3}x + 3$

Ex 8



Ex 9



Ex 10 : a) y= 2x+1 b) y= -x + 3 c) y = -3x/4 – 3

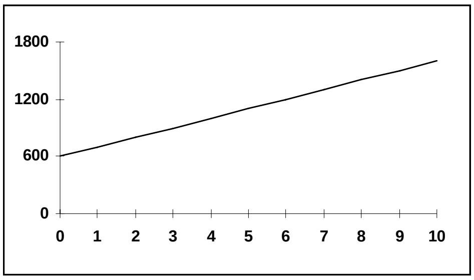
Ex 11 : a) y = 2x + 6 b) y= 4x + 20 c) y= -5x -25

Ex 12 : a) oui b) non c) oui

<u>Pr.1</u> A) a) 900F b) 1200 F c) 1800 F d) 2100F

B)

Mois	0	1	2	3	9	10
Francs	600	700	800	900	1500	1600

C) 

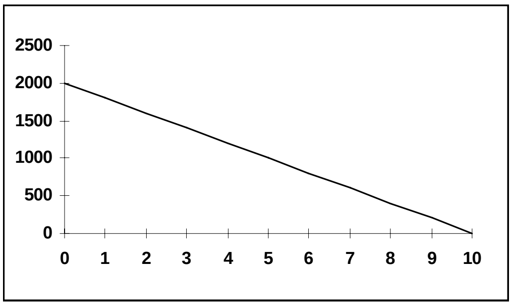
Horizontal : Mois Vertical : Frs

D) $y = 100x + 600$ E) 1200 F

<u>Pr. 2</u> A) 1) 1400F 2) 800 F

B)

Mois	0	1	2	3	7	10
Francs	2000	1800	1600	1400	600	0

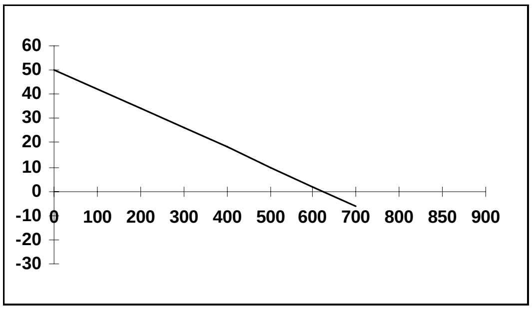
C) 

Horizontal : Mois Vertical : Frs

D) $y = -200x + 2000$ E) 5 mois

<u>Pr. 3</u> B)

Km	0	100	200	500
Litres restants	50	42	34	10

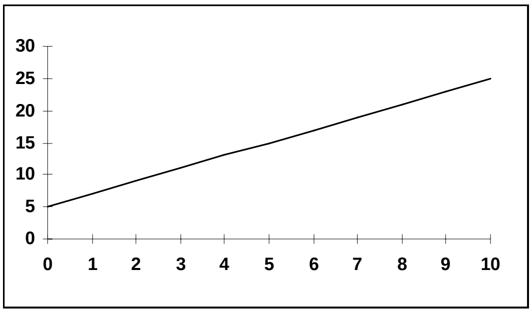
C) 

Horizontal : Km Vertical : Litres

D) $y = -8x/100 + 50$ E) 625 km

Pr. 4 B)

Km	1	2	3	4	8	10
Francs	7	9	11	13	21	25

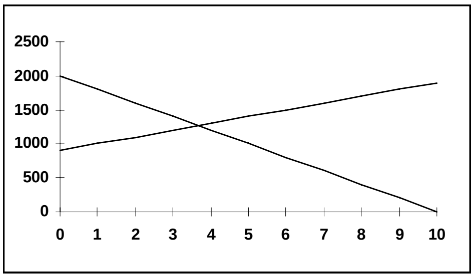
C) 

Horizontal : Km Vertical : Frs

D) y = 2x + 5 E) 17 Frs F) 5,5 km

Pr. 5 A)

Temps (mn)	0	1	2	5	10
A (litres)	900	1000	1100	1400	1900
B (litres)	2000	1800	1600	1000	0

B) 

Horizontal : Minutes Vertical : Litres

C) 3,5 minutes et 1300 litres

D) *y = 100x + 900* *y = -200x + 2000*

F) 3 minutes et 40 sec 1267 litres

Ex 13 : a) $y=\frac{1}{2}x-6,5$ b) $y=\frac{7}{4}x-\frac{25}{2}$ c) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{3}{7}$

Ex 14 : a) $y=9$ b) $y=-7$ c) $y=-\frac{1}{4}x+2$

Ex 15 : a) $y=-\frac{1}{7}x+5$ b) $y=-\frac{7}{5}x+\frac{16}{5}$ c) $y=2x+2$

Ex 16 : 1) $y=50x-750$ 2) $P_1 \in d$; $P_2 \notin d$

Ex 17 : 1) $y=x$ 2) $y=-x+10$