Chapitre 5 Les suites

5.1 Définition et généralités

Définition :
Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, donc si ***U*** est une telle suite, on aura :

$$\begin{aligned} \mathrm{U} : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow U(n) = U_n \end{aligned}$$

U_n est le n$^{\text{ème}}$ **terme** de la suite.

Exemple :
Soit la suite U : 5 ; 7 ; 9 ; 19 ; 24 ; …
Le 4$^{\text{ème}}$ terme de la suite est 19, donc $U_4 = 19$

Terme général :
Lorsque l'on peut donner facilement une **formule** pour calculer le n$^{\text{ème}}$ terme d'une suite, on dit que l'on donne le **terme général** de la suite.

Exemple :
Le terme général d'une suite U est : $U_n = 5n - 3$

Donc : $U_1 = 5\cdot 1 - 3 = 2$ $\quad U_{20} = 5\cdot 20 - 3 = 97$
$U_2 = 5\cdot 2 - 3 = 7$ $\quad U_{64} = 5\cdot 64 - 3 = 317$

Exercice 1 :
Calculer les 4 premiers termes des suites ci-dessous dont le terme général est :

a) $A_n = 2n$ d) $D_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ g) $G_n = \ln(n)$

b) $B_n = 4n + 3$ e) $E_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ h) $H_n = 100^{\frac{1}{n}}$

c) $C_n = 3n - 5$ f) $F_n = (-1)^n$

Exercice 2 :
Calculer le 57$^{\text{ème}}$ termes des suites ci-dessous dont le terme général est :

a) $T_n = \sqrt{4n}$ e) $X_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{2n-90}$

b) $U_n = n^3 + 2n + 3$ f) $Y_n = \ln\left(\log(n) + n\right)$

c) $V_n = \dfrac{\log(n)}{n}$ g) $Z_n = 10^{\frac{2n}{53}}$

d) $W_n = n\cdot\left(1 + (-1)^n\right)$

***Réponses* :**

Ex 1 : a) 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; b) 7 ; 11 ; 15 ; 19 ; c) -2 ; 1 ; 4 ; 7 ; d) $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{16}$; *e)* $\frac{2}{1}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{16}{16}$;
f) -1 ; +1 ; -1 ; +1 ; g) 0 ; 0,693 ; 1,099 ; 1,386 ; h) 100 ; 10 ; 4,642 ; 3,162

Ex 2 : a) $T_{57} = 15{,}1$; *b)* $U_{57} = 185'310$; *c)* $V_{57} = 0{,}031$; *d)* $W_{57} = 0$;
e) $X_{57} = 0{,}16$; *f)* $Y_{57} = 4{,}07$; *g) 141*

5.2 Suites arithmétiques

Définition :
Une suite est **arithmétique** si chacun de ses termes (sauf le premier) est obtenu en additionnant au précédent un même nombre ***r***, appelé **raison** de la suite arithmétique.

Forme générale : $U_{n+1} = U_n + r$ *(formule de récurrence)*

Exemples :

1) Soit la suite ***U*** : $7 \xrightarrow{+3} 10 \xrightarrow{+3} 13 \xrightarrow{+3} 16 \xrightarrow{+3} 19 \ \ldots$
2) Soit la suite ***V*** : $100 \xrightarrow{-10} 90 \xrightarrow{-10} 80 \xrightarrow{-10} 70 \xrightarrow{-10} 60 \ \ldots$

Terme général d'une suite arithmétique :
Si dans la suite arithmétique ***U***, on connaît le premier terme U_1 et la raison *r*, le terme général s'écrit alors :

$$\boxed{U_n = U_1 + r \cdot (n-1)}$$

Exemples :

1) Soit la suite arithmétique ***U*** : 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; …
   On a : $U_1 = 7$ et $r = 3$. Alors le terme général s'écrit : $U_n = 7 + 3 \cdot (n-1) = 7 + 3n - 3 = \boxed{3n+4}$
2) Soit la suite arithmétique ***V*** : 100 ; 90 ; 80 ; 70 ; 60 ; …
   On a: $V_1 = 100$; $r = -10$. Le terme général est: $V_n = 100 - 10 \cdot (n-1) = 100 - 10n + 10 = \boxed{-10n+110}$

Une autre manière de voir :
« On identifie la raison puis en ajuste pour obtenir convenablement le premier terme (et les autres). »

3) Soit la suite A : 10 ; 14 ; 18 ; 22 ; 26 ; … On a le terme général : $A_n = \ldots\ldots \cdot n + \ldots\ldots$
4) Soit la suite B : 50 ; 45 ; 40 ; 35 ; 30 ; … On a le terme général : $B_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5.3 Suites géométriques

Définition :
Une suite est **géométrique** si chacun de ses termes (sauf le premier) est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre ***r***, appelé **raison** de la suite géométrique.

Forme générale : $U_{n+1} = r \cdot U_n$ *(formule de récurrence)*

Exemples :

1) Soit la suite ***U*** : $2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{\cdot 3} 18 \xrightarrow{\cdot 3} 54 \xrightarrow{\cdot 3} 162 \ \ldots$
2) Soit la suite ***V*** : $800 \xrightarrow{:2} 400 \xrightarrow{:2} 200 \xrightarrow{:2} 100 \xrightarrow{:2} 50 \ \ldots$

Remarque : Diviser par 2 ou multiplier par $\frac{1}{2}$ c'est la même chose !

Terme général d'une suite géométrique:
Si dans la suite géométrique ***U***, on connaît le premier terme U_1 et la raison *r*, le terme général s'écrit alors :

$$\boxed{U_n = U_1 \cdot r^{(n-1)}}$$

Exemples :

1) Soit la suite géométrique $\boldsymbol{U}$: 2 ; 6 ; 18 ; 54; 162 ; …

On a : $U_1 = 2$ et $r = 3$. Alors le terme général s'écrit : $\boxed{U_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

2) Soit la suite géométrique $\boldsymbol{V}$: 800 ; 400 ; 200 ; 100 ; 50 ; …

On a : $V_1 = 800$; $r = \frac{1}{2}$. Le terme général est : $V_n = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{800}{2^{n-1}}}$

Exercice 3 :

Donner le terme général et le 50ème terme des suites ci-dessous :

a) $\boldsymbol{A}$: 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ;… $A_n =$ .... $A_{50} =$ ....

b) $\boldsymbol{B}$: 11 ; 17 ; 23 ; 29 ; 35 ;… $B_n =$ .... $B_{50} =$ ....

c) $\boldsymbol{C}$: 80 ; 70 ; 60 ; 50 ; 40 ;… $C_n =$ .... $C_{50} =$ ....

d) $\boldsymbol{D}$: 97 ; 86 ; 75 ; 64 ; 53 ;… $D_n =$ .... $D_{50} =$ ....

Exercice 4 :

Donner le terme général et le 11ème terme des suites ci-dessous :

a) $\boldsymbol{E}$: 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ;… $E_n =$ .... $E_{11} =$ ....

b) $\boldsymbol{F}$: 4 ; 12 ; 36 ; 108 ; 324 ;… $F_n =$ .... $F_{11} =$ ....

c) $\boldsymbol{G}$: 800 ; 400 ; 200 ; 100 ; 50 ;… $G_n =$ .... $G_{11} =$ ....

d) $\boldsymbol{H}$: 243 ; 81 ; 27 ; 9 ; 3 ;… $H_n =$ .... $H_{11} =$ ....

e) $\boldsymbol{I}$: 40 ; 45 ; 50 ; 55 ; 60 ;… $I_n =$ .... $I_{11} =$ ....

f) $\boldsymbol{J}$: 470 ; 450 ; 430 ; 410 ; 390 ;… $J_n =$ .... $J_{11} =$ ....

Exercice 5 :

a) Soit A une suite arithmétique. On sait que $A_4 = 33$ et $A_7 = 48$. Donner le terme général A_n

b) Soit B une suite arithmétique. Le 2ème terme vaut 91 et le 4ème 103. Donner le terme général.

c) Soit C une suite géométrique. Si le 3ème terme de la suite est 28 et le 6ème 224, que vaut C_n ?

d) Soit D une suite géométrique. Si le $D_4 = 384$ et le $D_6 = 6144$, que vaut D_n ?

e) Soit E une suite arithmétique. On sait que $E_2 = -20$ et $E_6 = 12$. Donner le terme général.

***Réponses* :**

Ex 3 : a) $A_n = 2n+3$; $A_{50} = 103$; c) $C_n = -10n+90$; $C_{50} = -410$;
b) $B_n = 6n+5$; $B_{50} = 305$; d) $D_n = -11n+108$; $D_{50} = -442$

Ex 4 : a) $E_n = 3\cdot 2^{n-1}$; $E_{11} = 3072$; d) $H_n = \dfrac{243}{3^{n-1}}$; $H_{11} = 0{,}004$;
b) $F_n = 4\cdot 3^{n-1}$; $F_{11} = 236'196$; e) $I_n = 5n+35$; $I_{11} = 90$;
c) $G_n = \dfrac{800}{2^{n-1}}$; $G_{11} = 0{,}781$; f) $J_n = -20n+490$; $J_{11} = 270$;

Ex 5 : a) $A_n = 5n+13$; b) $B_n = 6n+79$; c) $C_n = 7\cdot 2^{n-1}$; d) $D_n = 6\cdot 4^{n-1}$; e) $E_n = 8n-36$

5.4 Suites constantes

C'est un cas particulier de la suite arithmétique, c'est le cas où la raison ***r*** de la suite égale **zéro**.

Exemples :

A : 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; …. $A_n = 6$

B : π ; π ; π ; π ; π ; π ; … $B_n =$ ....

5.5 Suites quadratique ou suites carrées

Voici des exemples de *suites quadratiques (carrées) :*

+3 +5 +7 +9

C : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ;… $C_n = n^2$

D : 10 ; 13 ; 18 ; 25 ; 34 ; … $D_n =$ ....

E : -5 ; -2 ; 3 ; 10 ; 19 ; … $E_n =$ ....

F : 15 ; 18 ; 23 ; 30 ; 39 ; … $F_n =$ ....

Exercice 6 :

Donner le terme général et le 34$^{\text{ème}}$ terme des suites ci-dessous :

a) ***A*** : 5 ; 8 ; 13 ; 20 ; 29 ;… $A_n =$ .... $A_{34} =$ ....

b) ***B*** : 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ;… $B_n =$ .... $B_{34} =$ ....

c) ***C*** : -1 ; 2 ; 7 ; 14 ; 23 ;… $C_n =$ .... $C_{34} =$ ....

d) ***D*** : -19 ; -16 ; -11 ; -4 ; 5 ;… $D_n =$ .... $D_{34} =$ ....

e) ***E*** : 107 ; 110 ; 115 ; 122 ; 131 ;… $E_n =$ .... $E_{34} =$ ....

Exercice 7 :

Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) ***A*** : 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ;… $A_n =$ ....

b) ***B*** : 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ;… $B_n =$ ....

c) ***C*** : 17 ; 15 ; 13 ; 11 ; 9 ;… $C_n =$ ....

d) ***D*** : 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ;… $D_n =$ ....

e) ***E*** : 5 ; 2 ; -1 ; -4 ; -7 ;… $E_n =$ ....

f) ***F*** : log(5) ; log(5) ; log(5) ; log(5) ; log(5) ;… $F_n =$ ....

g) ***G*** : 80 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ;… $G_n =$ ....

h) ***H*** : -100 ; -97 ; -92 ; -85 ; -76 ;… $H_n =$ ....

i) ***I*** : 1000 ; 1200 ; 1440 ; 1728 ; 2073,6 ;… $I_n =$ ....

j) ***J*** : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ;… $J_n =$ ....

Solutions:

Ex 6 : a) $A_n = n^2+4$; $A_{34} = 1160$; b) $B_n = 11$; $B_{34} = 11$; c) $C_n = n^2-2$; $C_{34} = 1154$

d) $D_n = n^2-20$; $D_{34} = 1136$; e) $E_n = n^2+106$; $E_{34} = 1262$;

Ex 7 : a) $A_n = 5\cdot 2^{n-1}$ *(géom.)* ; b) $B_n = 5n$ *(arithm.)* ; c) $C_n = -2n+19$ *(arithm.)*

d) $D_n = 5$ *(constante)* ; e) $E_n = -3n+8$; f) $F_n = \log(5)$ *(constante)* ; g) $G_n = \dfrac{80}{2^{n-1}}$ *(géom.)*

h) $H_n = n^2-101$ *(carrée)* ; i) $I_n = 1000\cdot 1{,}2^{n-1}$ *(géom.)* ; j) $J_n = n$ *(arithm.)*

5.6. Calcul de la place (rang) d'un terme dans la suite

Si on connaît le terme général d'une suite et l'un de ses termes, alors on peut connaître la **place** de ce terme dans la suite. On parle aussi du **rang**. Pour cela il faudra résoudre une équation.

Exemples :

1) Soit $\boxed{U_n = 7n-8}$. On veut savoir à quelle place se trouve le terme 706 ?

Pour répondre à cette question, il faut résoudre $\boxed{7n-8=706}$

On trouve : $\boxed{n=102}$ c.à.d. à la 102ème place ! ($U_{102} = 706$)

2) Soit $\boxed{V_n = 5\cdot 3^{n-1}}$. Quel est le rang du terme 32'805 ?

On doit résoudre : $\boxed{5\cdot 3^{n-1} = 32'805}$

On a : $3^{n-1} = \dfrac{32'805}{5} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 \Leftrightarrow \log\left(3^{n-1}\right) = \log\left(6561\right) \Leftrightarrow$

$$(n-1)\cdot\log(3) = \log(6561) \Leftrightarrow (n-1) = \frac{\log(6561)}{\log(3)} \Leftrightarrow (n-1) = 8$$

On a : $\boxed{n=9}$. Son rang est 9.

3) Soit $\boxed{W_n = 8n+4}$. A quelle place se trouve le terme 845 ?

On résout : $8n+4 = 845$

On trouve : $n = 105{,}125 \notin \mathbb{N}$

Comme ce n'est pas un nombre entier, on peut conclure que le 845 n'est pas un terme de cette suite !

Exercice 8 :

a) $A_n = 4n - 6$; à quelle place se trouve le terme 558 ?

b) $B_n = 8 - 3n$; quel est le rang du terme -4345 ?

c) $C_n = 5 \cdot 2^{n-1}$; à quelle place se trouve le terme 1280 ?

d) $D_n = \dfrac{6561}{3^{n-1}}$; Le terme 9 est-il dans cette suite ? Si oui, quel est son rang ?

e) $E_n = n^2 + 7$; à quelle place se trouve le terme 7'928 ?

f) $F_n = n^2 - 73$; quel est le rang du terme 10'331 ?

Exercice 9 :

a) $A_n = n^5 + 3$; à quelle place se trouve le terme 32'771 ?

b) $B_n = 10^n$; quel est le rang du terme 1'000'000 ?

c) $C_n = \log(n)$; à quelle place se trouve le terme 4 ?

d) $D_n = n^2 + 3n + 4$; Le terme 158 est-il dans cette suite ? Si oui, quel est son rang ?

e) $E_n = \sqrt[7]{n}$; à quelle place se trouve le terme 3 ?

f) $F_n = 3 \cdot 10^{4n-1}$; quel est le rang du terme 30'000'000 ?

g) $G_n = \log(n + 900)$; à quelle place se trouve le terme 3 ?

h) $H_n = 5n^2 - 3n + 8$; quel est le rang du terme 232 ?

i) $I_n = n^8 + 53$; à quelle place se trouve le terme 309 ?

j) $J_n = \sqrt[5]{n} + 19$; Le terme 23 est-il dans cette suite ? Si oui, quel est son rang ?

k) $K_n = n^2 + 19$; Le terme 164 est-il dans cette suite ? Si oui, quel est son rang ?

Exercice 10 : Soit la suite $\boldsymbol{U}$: 20 ; 23 ; 26 ; 29 ; 32 ;…

a) Trouver les 3 termes suivants.
b) Trouver le terme général.
c) Trouver le 1'000ème terme.
d) A quelle place (rang) se trouve le terme 350 ?
e) Le terme 2'367 appartient-il à cette suite ? Si oui, à quelle place ?

Exercice 11 : Soit la suite $\boldsymbol{V}$: -1 ; 2 ; 7 ; 14 ; 23 ;…

a) Déterminer le 6ème terme.
b) Trouver le terme général.
c) Calculer V_7 et V_{19}
d) Quel est le rang du terme 898 ?
e) Existe-t-il un terme valant 999 ?

Exercice 12 : Soit la suite $\boldsymbol{W}$: 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ;…

a) Trouver les 2 termes suivants.
b) Trouver le terme général.
c) Trouver le 12ème terme.
d) Calculer W_7
e) A quelle place se trouve le terme 3'072 ?
f) Le terme 98'304 se trouve-t-il dans cette suite ? Si oui, à quelle place ?

Exercice 13 : Soit la suite $\boldsymbol{X}$: 600 ; 550 ; 500 ; 450 ; 400 ;…

a) Trouver le terme général.
b) Calculer le 52ème terme.
c) A quelle place se trouve le terme -8750 ?
d) 11'740 est-il dans cette suite ? Si oui, quelle est son rang ?

Exercice 14 : Soit la suite $\boldsymbol{Y}$ dont le terme général est : $Y_n = 10^n$

a) 20'000 est-il dans cette suite ?
b) A quelle place se trouve le terme 1'000'000'000 ?
c) A quelle place se trouve le terme le plus proche de 52'927 ?

Solutions :

Ex 8 : a) $n=141$; b) $n=1'451$; c) $n=9$; d) $n=7$; e) $n=89$; f) $n=102$

Ex 9 : a) $n=8$; b) $n=6$; c) $n=10'000$; d) Oui : $n=11$ ($\Delta=625$) ; e) $n=2'187$; f) $n=2$
g) $n=100$; h) $n=7$ ($\Delta=4'489$) ; i) $n=2$; j) Oui : $n=1'024$; k) Non ($n=12,04\notin\mathbb{N}$)

Ex 10 :a) 35 ; 38 ; 41 ; b) $U_n=17+3n$; c) $U_{1000}=3017$; d) 111ème place ; e) non

Ex 11 :a) 34 ; b) $V_n=n^2-2$; c) $V_7=47$; $V_{19}=359$; d) 30ème place ; e) non

Ex 12 :a) 96 ; 192 ; b) $W_n=3\cdot 2^{n-1}$; c) $W_{12}=6144$; d) $W_7=192$; e) 11ème place ; f) Oui, 16ème place ;

Ex 13 :a) $X_n=650-50n$; b) $X_{52}=-1950$; c) 188ème place ; d) non

Ex 14 : a) Non car $n\approx 4,3\notin\mathbb{N}$; b) $n=9$;
c) On a $n\approx 4,73$. Entre la 4ème et la 5ème place : $Y_4=10'000$ et $Y_5=100'000$.
Donc la 4ème place est la plus proche.

5.7. Suites alternées

Voici des exemples de suites **alternées** :

A : –1 ; +1 ; –1 ; +1 ; –1 ; +1 ; …

B : +1 ; –1 ; +1 ; –1 ; +1 ; –1 ; …

$A_n=$ ....

$B_n=$ ....

C : –3 ; +6 ; –9 ; +12 ; –15 ; +18 ; …

D : +10 ; –13 ; +18 ; –25 ; +34 ; –45 ; …

Terme général d'une suite alternée

Pour trouver le terme général d'une suite **alternées** on procède comme suit :

- S'assurer que la suite est bien alternée !
- Si le premier terme est **négatif**, mettre $(-1)^n$ en facteur.
- Si le premier terme est **positif**, mettre $(-1)^{n+1}$ en facteur.
- Compléter par le facteur manquant en oubliant tous les signes. (Traiter la suite comme si elle n'était pas alternée.)

Exemple :

Trouver le terme général de la suite ***U*** : +4 ; –9 ; +14 ; –19 ; +24 ; –29 ; …

On a que :

- Cette suite est bien alternée.
- Le 1er terme est positif, donc le facteur sera $(-1)^{n+1}$
- On considère la suite sans les signes : 4 ; 9 ; 14 ; 19 ; 24 ; 29 ; … c'est une suite arithmétique !

Donc : $\boxed{U_n=(-1)^{n+1}\cdot(5n-1)}$

Exemples :

C : –3 ; +6 ; –9 ; +12 ; –15 ; +18 ; … $C_n=$ ....

D : +10 ; –13 ; +18 ; –25 ; +34 ; –45 ; … $D_n=$ ....

Exercice 15 :

Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) ***A*** : -500 ; 400 ; -300 ; 200 ; -100 ;… $A_n = $ ....

b) ***B*** : 4 ; -7; 12 ; -19 ; 28 ;… $B_n = $ ....

c) ***C*** : 1000 ; -1200 ; 1440 ; -1728 ; $2073{,}6$;… $C_n = $ ....

d) ***D*** : -6 ; 17 ; -28 ; 39 ; -50 ;… $D_n = $ ....

e) ***E*** : 12 ; -15 ; 20 ; -27 ; 36 ;… $E_n = $ ....

f) ***F*** : 6 ; -6 ; 6 ; -6 ; 6 ;… $F_n = $ ....

g) ***G*** : -20 ; 40 ; -80 ; 160 ; -320 ;… $G_n = $ ....

Exercice 16 :

Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) ***A*** : 4 ; -7 ; 10 ; -13 ; 16 ;… $A_n = $ ....

b) ***B*** : -7 ; 10 ; -15 ; 22 ; -31 ;… $B_n = $ ....

c) ***C*** : -10 ; 20 ; -40 ; 80 ; -160 ;… $C_n = $ ....

d) ***D*** : -5 ; -1 ; 3 ; 7 ; 11 ;… $D_n = $ ....

Solutions:

Ex 15: a) $A_n = (-1)^n \cdot (-100n + 600)$ d) $D_n = (-1)^n \cdot (11n - 5)$ g) $G_n = (-1)^n \cdot 20 \cdot 2^{n-1}$

b) $B_n = (-1)^{n+1} \cdot (n^2 + 3)$ e) $E_n = (-1)^{n+1} \cdot (n^2 + 11)$

c) $C_n = (-1)^{n+1} \cdot 1000 \cdot 1{,}2^{n-1}$ f) $F_n = (-1)^{n+1} \cdot 6$

Ex 16: a) $A_n = (-1)^{n+1} \cdot (3n + 1)$ c) $C_n = (-1)^n \cdot 10 \cdot 2^{n-1}$

b) $B_n = (-1)^n \cdot (n^2 + 6)$ *d) pas alternée :* $D_n = 4n - 9$

5.8. Suites rationnelles

Définition :

Une suite **rationnelle** est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$, donc si ***U*** est une telle suite, chaque terme de la suite est un nombre rationnel.

Exemples :

Soit la suite ***U*** : $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{9}{15}$; $\frac{16}{21}$; $\frac{25}{27}$; …

Soit la suite ***V*** : $-\frac{6}{10}$; $\frac{9}{20}$; $-\frac{12}{40}$; $\frac{15}{80}$; $-\frac{18}{160}$; …

Terme général :

Lorsqu'une suite est **rationnelle**, pour trouver le terme général de cette suite, il faut traiter séparément le **numérateur** et le **dénominateur** et déterminer dans chaque cas le terme général. Pour terminer on réunit ces deux résultats.

Exemple :

Soit la suite $\boldsymbol{U}$: $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{17}{21}$; $\frac{26}{27}$; …

Le suite du numérateur $\boldsymbol{N}$: 2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; … a pour terme général : $N_n = n^2 + 1$

Le suite du numérateur $\boldsymbol{D}$: 3 ; 9 ; 15 ; 21 ; 27 ; … a pour terme général : $D_n = 6n - 3$

Le terme général de la suite $\boldsymbol{U}$ est : $\boxed{U_n = \frac{n^2+1}{6n-3}}$

Exercice 17 :

Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) $\boldsymbol{A}$: $\frac{7}{14}$; $\frac{10}{23}$; $\frac{15}{32}$; $\frac{22}{41}$; $\frac{31}{50}$;... $A_n =$ ....

b) $\boldsymbol{B}$: $\frac{4}{5}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{16}{13}$; $\frac{32}{17}$; $\frac{64}{21}$;... $B_n =$ ....

c) $\boldsymbol{C}$: $\frac{4}{6}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{14}$; $\frac{4}{21}$; $\frac{4}{30}$;... $C_n =$ ....

d) $\boldsymbol{D}$: $\frac{14}{600}$; $\frac{17}{570}$; $\frac{20}{540}$; $\frac{23}{510}$; $\frac{26}{480}$;... $D_n =$ ....

e) $\boldsymbol{E}$: $-\frac{6}{10}$; $\frac{9}{20}$; $-\frac{12}{40}$; $\frac{15}{80}$; $-\frac{18}{160}$;... $E_n =$ ....

f) $\boldsymbol{F}$: $\frac{10}{4}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{12}{12}$; $\frac{13}{19}$; $\frac{14}{28}$;... $F_n =$ ....

g) $\boldsymbol{G}$: $-\frac{75}{8}$; $\frac{70}{13}$; $-\frac{65}{18}$; $\frac{60}{23}$; $-\frac{55}{28}$;... $G_n =$ ....

h) $\boldsymbol{H}$: $\frac{2}{3}$; $\frac{10}{6}$; $\frac{50}{12}$; $\frac{250}{24}$; $\frac{1250}{48}$;... $H_n =$ ....

i) $\boldsymbol{I}$: $\frac{7}{3}$; $-\frac{10}{3}$; $\frac{15}{3}$; $-\frac{22}{3}$; $\frac{31}{3}$;... $I_n =$ ....

Solutions:

Ex 17: *a)* $A_n = \frac{n^2+6}{9n+5}$ *d)* $D_n = \frac{3n+11}{630-30n}$ *g)* $G_n = (-1)^n \cdot \frac{80-5n}{3+5n}$

b) $B_n = \frac{4 \cdot 2^{n-1}}{4n+1}$ *e)* $E_n = (-1)^n \cdot \frac{3+3n}{10 \cdot 2^{n-1}}$ *h)* $H_n = \frac{2 \cdot 5^{n-1}}{3 \cdot 2^{n-1}}$

c) $C_n = \frac{4}{n^2+5}$ *f)* $F_n = \frac{n+9}{n^2+3}$ *i)* $I_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2+6}{3}$

5.9 Suites définies par récurrence

Lorsqu'on donne le premier terme d'une suite, puis la règle de calculer le n$^{\text{ème}}$ terme partir du $(n-1)^{\text{ème}}$ terme, ou du $(n-2)^{\text{ème}}$, etc. ; ce procédé s'appelle la **récurrence** !
Ainsi avec une **formule de récurrence**, en connaissant U_1, on peut calculer U_2, puis U_3, …

Exemple 1 :
On donne la formule de récurrence: $U_n = 3 \cdot U_{n-1}$ et $U_1 = 5$

On calcule : $U_2 = 3 \cdot U_{2-1} = 3 \cdot U_1 = 3 \cdot 5 = 15$

$U_3 = 3 \cdot U_{3-1} = 3 \cdot U_2 = 3 \cdot 15 = 45$

$U_4 = 3 \cdot U_{4-1} = 3 \cdot U_3 = 3 \cdot 45 = 135$

On reconnaît une suite géométrique de raison 3.

Exemple 2 :
Soit la suite $1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ...$

On peut trouver les termes suivants : $1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ;$ .... ; .... ; .... ; .... ; .... ;...

On obtient le 100$^{\text{ème}}$ terme en ……………………………………………………………………………

Ce qui s'écrit : $U_{100} =$ ....

Et de manière générale : …………………………………………………………

Remarque : Cette suite porte le nom d'un mathématicien…

Exercice 18 :
Pour chaque suite donnée par récurrence, calculer les 4 premiers termes.

a) $U_n = (U_{n-1})^2 + 2$ et $U_1 = 2$

b) $V_n = 2 \cdot V_{n-1} - 4$ et $V_1 = -5$

c) $W_n = \dfrac{W_{n-1}}{2} + 1$ et $W_1 = 3$

d) $X_n = 3 \cdot (X_{n-1})^2$ et $X_1 = 1$

Exercice 19 :
Pour chaque suite donnée par récurrence, calculer les 4 premiers termes.

a) $U_n = 3 \cdot U_{n-1} + 2$ et $U_1 = 4$

b) $V_n = 4 \cdot V_{n-1} + 3$ et $V_1 = 1$

c) $W_n = \sqrt{W_{n-1} + 2}$ et $W_1 = 2$

d) $Y_n = (Y_{n-1})^2 + 1$ et $Y_1 = 4$

e) $Z_n = \sqrt[3]{(Z_{n-1} + 2)^2}$ et $Z_1 = 6$

f) $A_n = (A_{n-1})^3 + 1$ et $A_1 = 1$

g) $B_n = \dfrac{1}{B_{n-1}}$ et $B_1 = 2$

h) $C_n = \left(C_{n-1}\right)^2$ et $C_1 = 5$

i) $D_n = \sqrt{D_{n-1}} + 2$ et $D_1 = 9$

j) $E_n = \sqrt[3]{\left(E_{n-1}\right)^2 + 1}$ et $E_1 = 2$

Exercice 20 :

Pour chaque suite donnée par récurrence, donner le **terme général**.

a) $U_n = U_{n-1} + 6$ et $U_1 = 4$

b) $V_n = 3 \cdot V_{n-1}$ et $V_1 = 2$

c) $W_n = W_{n-1} + 2n - 1$ et $W_1 = 1$

d) $X_n = X_{n-1} + 2$ et $X_1 = -7$

Exercice 21 :

On donne la récurrence suivante : $U_n = 3n^2 - U_{n-1} - U_{n-2} - 6n + 23$ avec $U_1 = 7$ et $U_2 = 10$

a) Calculer U_3 , U_4 et U_5

b) Déterminer le terme général U_n de cette suite.

c) Calculer U_{163}

Exercice 22 :

On donne la récurrence suivante : $U_n = 4n^2 - 8n - 18 - 2 \cdot U_{n-1} - U_{n-2}$ avec $U_1 = -5$ et $U_2 = -2$

a) Calculer U_3 , U_4 et U_5

b) Déterminer le terme général U_n de cette suite.

c) Calculer U_{604}

Exercice 23 :

On donne la récurrence suivante : $U_n = 2 \cdot U_{n-2} - U_{n-1} + 9$ avec $U_1 = 1$ et $U_2 = 4$

a) Calculer U_3 , U_4 et U_5

b) Déterminer le terme général U_n de cette suite.

c) Combien y-a-t-il de termes dans cette suite qui sont compris entre 10'000 et 20'000 ?

Exercice 24 :

On donne la récurrence suivante : $U_n = \dfrac{U_{n-1}}{4} + 3n + 13$ avec $U_1 = 20$

a) Trouver les 5 premiers termes

b) Trouver le terme général de cette suite.

c) Trouver le 100ème terme.

Exercice 25 :

On donne la récurrence suivante : $U_n = \dfrac{(n-1) \cdot U_{n-1}}{n}$ avec $U_1 = 1$

a) Trouver les 5 premiers termes *(laisser en fractions).*

b) Trouver le terme général de cette suite.

c) Calculer le 100ème terme.

Exercice 26 :

Soit la suite définie par : $U_n = 2 \cdot U_{n-1}$ avec $U_1 = 5$

a) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
b) Déterminer le terme général de cette suite.
c) Calculer le 14ème terme.

Exercice 27 :

Soit la suite définie par : $U_n = 4 \cdot U_{n-1} - 9n + 6$ avec $U_1 = 5$

a) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
b) Déterminer le terme général de cette suite.
c) Calculer le 333ème terme.

Exercice 28 :

Soit la suite définie par : $U_n = U_{n-1} + 2n - 1$ avec $U_1 = 4$

Mêmes questions que l'exercice 27.

Solutions :

Ex 18: a) 2 ; 6 ; 38 ; 1446 ; b) -5 ; -14 ; -32 ; -68 ; c) 3 ; 2,5 ; 2,25 ; 2,125 ; d) 1 ; 3 ; 27 ; 2187

Ex 19: a) U : 4 ; 14 ; 44 ; 134 ; f) A : 1 ; 2 ; 9 ; 730 ;
b) V : 1 ; 7 ; 31 ; 127 ; g) B : 2 ; ½ ; 2 ; ½ ;
c) W : 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; h) C : 5 ; 25 ; 625 ; 390'625 ;
d) Y : 4 ; 17 ; 290 ; 84'101 ; i) D : 9 ; 5 ; 4,236 ; 4,058 ;
e) Z : 6 ; 4 ; 3,302 ; 3,041 ; j) E : 2 ; 1,710 ; 1,577 ; 1,516 ;

Ex 20: a) $U_n = 6n - 2$ *; b)* $V_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ *; c)* $W_n = n^2$ *; d)* $X_n = 2n - 9$

Ex 21: a) 15 ; 22 ; 31 ; b) $U_n = n^2 + 6$ *; c)* $U_{163} = 26'575$

Ex 22: a) 3 ; 10 ; 19 ; b) $U_n = n^2 - 6$ *; c)* $U_{604} = 364'810$

Ex 23: a) 7 ; 10 ; 13 ; b) $U_n = 3n - 2$ *; c)* $N = 6667 - 3334 + 1 = 3'334$ *termes*

Ex 24: a) 20 ; 24 ; 28 ; 32 ; 36 ; b) $U_n = 4n + 16$ *; c)* $U_{100} = 416$

Ex 25: a) 1/1 ; 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5 ; b) $U_n = \frac{1}{n}$ *; c)* $U_{100} = \frac{1}{100}$

Ex 26: a) 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ; b) $U_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ *; c)* $U_{14} = 40'960$

Ex 27: a) 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; b) $U_n = 3n + 2$ *; c)* $U_{333} = 1'001$

Ex 28: a) 4 ; 7 ; 12 ; 19 ; 28 ; b) $U_n = n^2 + 3$ *; c)* $U_{333} = 110'892$

5.11 Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

Si ***U*** est une suite **arithmétique** de raison ***r*** et de premier terme U_1, alors la somme des ***n*** premier termes de cette suite, notée S_n, est donnée par la formule suivante :

$$\boxed{S_n = \left(\frac{U_1 + U_n}{2}\right) \cdot n}$$

Exemple :

Soit la suite arithmétique ***U*** : 5 ; 12 ; 19 ; 26 ; 33 ; 40 ; 47 ; 54 ; …

On veut calculer la somme des 8 premiers termes de cette suite.

On a : $U_1 = 5$; $U_8 = 54$; $n = 8$

Donc : $S_8 = \left(\frac{5 + 54}{2}\right) \cdot 8 = 236$

Exercice 29 :
Calculer les sommes ci-dessous :
a) $18+23+28+33+38+43+48+53+58=$

b) $1+2+3+4+...+199+200=$

c) $90+91+92+...+149+150=$

d) $20+28+36+...+404+412=$

Exercice 30 :
Soit la suite ***U*** : 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; …
Déterminer :
a) la raison ***r***

b) le premier terme U_1

c) le terme général

d) le 100ème terme

e) S_{100}

f) la somme des 74 premiers termes.

Exercice 31 :
Le terme général d'une suite arithmétique ***U*** est donnée par : $U_n = 2n - 3$
Déterminer :
a) la raison r

b) U_{28}

c) S_{28}

d) le rang du terme 195

Exercice 32 :
Calculer les sommes suivantes :
a) $54+57+60+...+270+273=$

b) $10+20+30+...+1770+1780=$

c) $1040+1035+1030+...+615+610=$

d) Calculer la somme des 89 premiers termes de la suite :
U : 4 ; 7 ; 3 ; -2 ; 4 ; 7 ; 3 ; -2 ; 4 ; 7 ; 3 ; -2 ; …

e) Calculer la somme des 106 premiers termes de la suite :
V : -3 ; 2 ; 5 ; 6 ; -3 ; 2 ; 5 ; 6 ; -3 ; 2 ; 5 ; 6 ; -3 ; …

f) Calculer la somme des 193 premiers termes de la suite :
W : 1 ; 3 ; 7 ; -5 ; 8 ; 1 ; 3 ; 7 ; -5 ; 8 ; 1 ; 3 ; 7 ; -5 ; 8 ; …

g) Calculer la somme des 67 premiers termes de la suite :
X : -3 ; 11 ; 4 ; -3 ; 11 ; 4 ; -3 ; 11 ; 4 ; -3 ; 11 ; 4 ; …

Solutions :
Ex 29: a) 342 ; b) 20'100 ; c) 7'320 ; d) 10'800
Ex 30: a) $r=3$ *; b)* $U_1=4$ *; c)* $U_n=3n+1$ *; d)* $U_{100}=301$ *;e)* $S_{100}=15'250$ *; f)* $S_{74}=8'399$
Ex 31: a) $r=2$ *; b)* $U_{28}=53$ *; c)* $S_{28}=728$ *; d) le rang est 99*
Ex 32: a) 12'099 ; b) 159'310 ; c) 71'775 ; d) 268 ; e) 259 ; f) 543 ; g) 261