5. Puissances et racines

§ 5.1 Puissances d'exposant positif

Il arrive souvent qu'on multiplie un entier plusieurs fois pas lui-même.
Par exemple :

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ est le produit de 6 facteurs égaux à 2.

La notation « **puissance** » permet d'écrire plus brièvement ce produit.

On note : $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

Qui se lit : « 2 à la puissance 6 » ou plus simplement : « 2 puissance 6 »

D'une manière plus générale, pour un nombre **a** et un entier n > 0, on note :

$$\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n facteurs}} = a^n}$$

On appelle a^n la puissance n$^{\text{ème}}$ de *a*.
Ce symbole se lit : « ***a puissance n*** ».
Dans le symbole a^n, l'entier ***n*** s'appelle **l'exposant** et le nombre ***a*** s'appelle la **base**.

Remarques :

1) Par définition, on écrit : $\boxed{a^0 = 1 \text{ si } a > 0}$
2) $a^1 = a$, on n'écrit pas l'exposant 1.
3) $0^0 = ?$

Exercice 1 :
Calculer :

a) $3^4 =$

b) $100^2 =$

c) $(-5)^2 =$

d) $12^2 =$

e) $1^9 =$

f) $0{,}1^2 =$

g) $400^3 =$

h) $(-2)^3 =$

i) $2^3 + 3^2 =$

j) $2^3 \cdot 3^2 =$

k) $4^0 =$

l) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

Exercice 2 :
Calculer :

a) $30^3 =$

b) $600^2 =$

c) $(-3)^4 =$

d) $70^2 =$

e) $0{,}01^2$

f) $0{,}2^3 =$

g) $0{,}3^3 =$

h) $35^0 =$

i) $(-1)^{50} =$

j) $(-1)^{51} =$

k) $40^1 =$

l) $\left(-\frac{5}{4}\right)^3 =$

Exercice 3 :
Calculer :

a) $\left(-4-3\right)^2-2^3=$

b) $(-4)^2-(-2)(-3)^2-(-2)^3=$

c) $(-9)^2-(-3)^3+(-5)^3=$

d) $(-2)\cdot 16-(-4)^3-(-2)\cdot(-8)=$

§ 5.2 Propriétés des puissances

$$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{(m+n)}} \qquad \boxed{\frac{a^m}{a^n}=a^{(m-n)}}\ (a\neq 0) \qquad \boxed{(a^m)^n=a^{m\cdot n}}$$

$$\boxed{(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}\ (b\neq 0) \qquad \boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}\ (a\neq 0)$$

Exemples :

$3^4\cdot 3^2=3^6$; $\frac{4^8}{4^3}=4^5$; $\left(7^5\right)^3=7^{15}$; $\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{4^3}{5^3}$; $5^{-2}=\frac{1}{5^2}$

Exercice 4 :
Compléter par les exposants manquants :

1) $5^6\cdot 5^{\cdots}=5^8$

2) $2^6\cdot 2^4=2^{\cdots}$

3) $2^3+2^2=2^{\cdots}$

4) $3^2\cdot 3^5\cdot 2^{\cdots}\cdot 3^{\cdots}=2^6\cdot 3^9$

5) $7^{\cdots}\cdot 7^2=7^2$

6) $10^{\cdots}\cdot 10^2=10^3$

7) $2^2\cdot 3^4\cdot 2^4\cdot 2^5=2^{\cdots}\cdot 3^{\cdots}$

8) $3^2\cdot 3^{\cdots}\cdot 2^4\cdot 2^{\cdots}=2^7\cdot 3^5$

9) $(0.2)^4\cdot(0.2)=(0.2)^{\cdots}$

10) $(-2)^3\cdot(-2)^5=(-2)^{\cdots}$

11) $7^3\cdot 3^4\cdot 3^{\cdots}\cdot 7^{\cdots}=3^6\cdot 7^9$

12) $2^7\cdot 2^{\cdots}\cdot 3^4\cdot 3^{\cdots}=2^7\cdot 3^4$

Exercice 5 :
Compléter par l’exposant manquant :

1) $a^3\cdot a^5=a^{\cdots}$

2) $x^4\cdot x^2\cdot x=x^{\cdots}$

3) $y\cdot y^5\cdot y^2\cdot y^0=y^{\cdots}$

4) $a^3\cdot b^2\cdot a^4\cdot a^2=a^{\cdots}\cdot b^{\cdots}$

5) $a^5\cdot b^{\cdots}\cdot a^{\cdots}\cdot b^2=a^8\cdot b^5$

6) $x^5\cdot y^{\cdots}\cdot y^4\cdot x^{\cdots}=x^6\cdot y^4$

Exercice 6 :

Ecrire aussi simplement que possible chacune des expressions, sans exposant négatif :

a) $2^5 \cdot 2^{-3} =$

b) $\dfrac{(0,4)^6}{(0,4)^5} =$

c) $(3+7)^2 =$

d) $(4^{-2})^3 =$

e) $10^3 \cdot 10^{-5} =$

f) $\dfrac{\pi^3}{\pi^5} =$

g) $(5 \cdot 9)^{-2} =$

h) $(5^3)^{-1} =$

i) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 =$

j) $0^0 =$

Exercice 7 :

Ecrire aussi simplement que possible chacune des expressions, sans exposant négatif :

a) $(-5)^3 \cdot (-5) \cdot (-5)^4 =$

b) $(+3)^4 \cdot (-2) \cdot (+3)^2 \cdot (-2)^3 =$

c) $7^2 \cdot (7^3)^4 =$

d) $3^5 \cdot (3^2 \cdot 3^4) =$

e) $(7^2 \cdot 7^3)^4 =$

f) $(-3)^2 \cdot (-3) \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4 =$

g) $\left[(5^2)^3 \cdot 3^4\right]^2 =$

h) $(4^2)^3 \cdot (4^3)^5 \cdot 4 =$

§ 5.3 Les puissances de 10 & l'écriture scientifique

Les puissances de 10 sont souvent utilisées par les scientifiques pour exprimer des nombres très grands ou très petits. L'exposant est un nombre positif, négatif ou nul.

$10^3 = 1000$

$10^2 = 100$

$10^1 = 10$

$10^0 = 1$

$10^{-1} = 0,1 = \frac{1}{10}$

$10^{-2} = 0,01 = \frac{1}{100}$

$10^{-3} = 0,001 = \frac{1}{1000}$

On observe que :

$$\boxed{10^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{si } n > 0}$$

$$\boxed{10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{0\ldots01}_{\substack{n \text{ chiffres} \\ \text{après la} \\ \text{virgule}}} \quad \text{si } n > 0}$$

Forme caractéristique ou notation scientifique ou puissances de 10 :
Tout nombre réel X peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est une puissance de 10 :

$\boxed{X = n \cdot 10^p}$ où $1 \le n < 10$ et p est un nombre entier

Cette notation se rencontre très couramment en sciences et en technique pour exprimer des nombres très grands ou très petits.

Par exemple : $M_{terre} = 6 \cdot 10^{24}$ [kg] ; $M_{proton} = 1,672 \cdot 10^{-27}$ [kg]

Exercice 8 :
Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

1) 31,02 =

2) 341,5 =

3) 10000 =

4) $15,6721 \cdot 10^4$ =

5) 14,476 =

6) 0,023056 =

7) 18519 =

8) 0,999991=

Exercice 9 :
Écrire les nombres suivants en écriture décimale :

1) $2,43 \cdot 10^1$ =

2) $2,002 \cdot 10^2$ =

3) $3,56 \cdot 10^4$ =

4) $0,012 \cdot 10^0$ =

5) $0,023 \cdot 10^{-1}$ =

6) $562,4 \cdot 10^{-2}$ =

7) $0,07304 \cdot 10^3$ =

8) $13,04 \cdot 10^{-4}$ =

Exercice 10 :

Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

1) 145,023 =

2) 0,0455 =

3) 20'000 =

4) $7\cdot10^{3}+2\cdot10^{0}+3\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}=$

5) 4,963 =

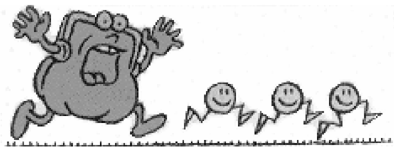
6) 0,007307 =

7) $19{,}671\cdot10^{4}$ =

8) $5\cdot10^{2}+4\cdot10^{-1}+3\cdot10^{-5}=$

Exercice 11 :

On dispose de trois pièces de monnaie identiques. On les aligne soit côté pile, soit côté face. Par exemple :



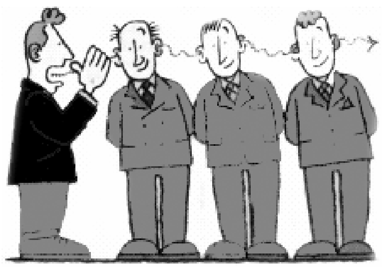
1) De combien de façons différentes peut-on les disposer ?

2) Même question avec cinq pièces.

3) Même question avec n pièces. (Donner la réponse en fonction de n.)

Exercice 12 :

Monsieur Babille au cours d'un voyage a entendu une rumeur... Le 1er jour de son retour dans la ville de **Racontar** il répète cette rumeur à trois personnes. Le 2ème jour chacune des trois personnes met au courant trois nouvelles personnes. Les jours suivants, la diffusion de la rumeur se poursuit de la même manière dès qu'une personne l'apprend, elle en informe trois autres dès le lendemain.



1. Combien de personnes apprennent la rumeur le 3ème jour ?

2. Écrire le calcul permettant de trouver combien de personnes apprennent la rumeur le 10ème jour. (On ne demande pas d'effectuer le calcul.)

3. Même question pour le 18ème jour.

4. En proposant un codage qui permette d'écrire les calculs ci-dessus de manière condensée, trouver une formulation générale.

§ 5.4 Les racines et leurs propriétés

Définition :
La **racine carrée** d'un nombre positif A est **le nombre positif** x, tel que $x^2 = A$.
La racine carrée de A se note : $\sqrt{A}$

Exemples : $\sqrt{16} = ...$ car $\sqrt{81} = ...$ car

Propriétés des racines carrées :
Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$ on a :

1) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = ...$ et $\sqrt{a^2} = ...$ 2) $\sqrt{a \cdot b} = ...$ 3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = ...$

Exercice 13 :
Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\sqrt{144} =$

b) $\sqrt{\frac{49}{16}} =$

c) $-\sqrt{\frac{25}{64}} =$

d) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

e) $\sqrt{-36} =$

f) $\sqrt{\frac{27}{75}} =$

g) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$

h) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} =$

i) $\sqrt{25-16} =$

j) $\left(\sqrt{2}\right)^2 =$

k) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} =$

l) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} =$

Définition et propriétés
La **racine cubique** d'un nombre positif, négatif ou nul V est le nombre x, tel que $x^3 = V$
La racine cubique de V se note : $\sqrt[3]{V}$

1) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ et $\sqrt[3]{a^3} = a$ 2) $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ 3) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ si $b \neq 0$

Remarques importantes :
Contrairement aux racines carrées, ***un nombre négatif possède une racine cubique*** !
Exemple : $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$

Exercice 14 :
Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} =$

c) $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}} =$

d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-4} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}} =$

f) $\sqrt[3]{6^3} =$

g) $\sqrt[3]{3^4} \cdot \sqrt[3]{3^8} =$

h) $\frac{\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[3]{3}} =$

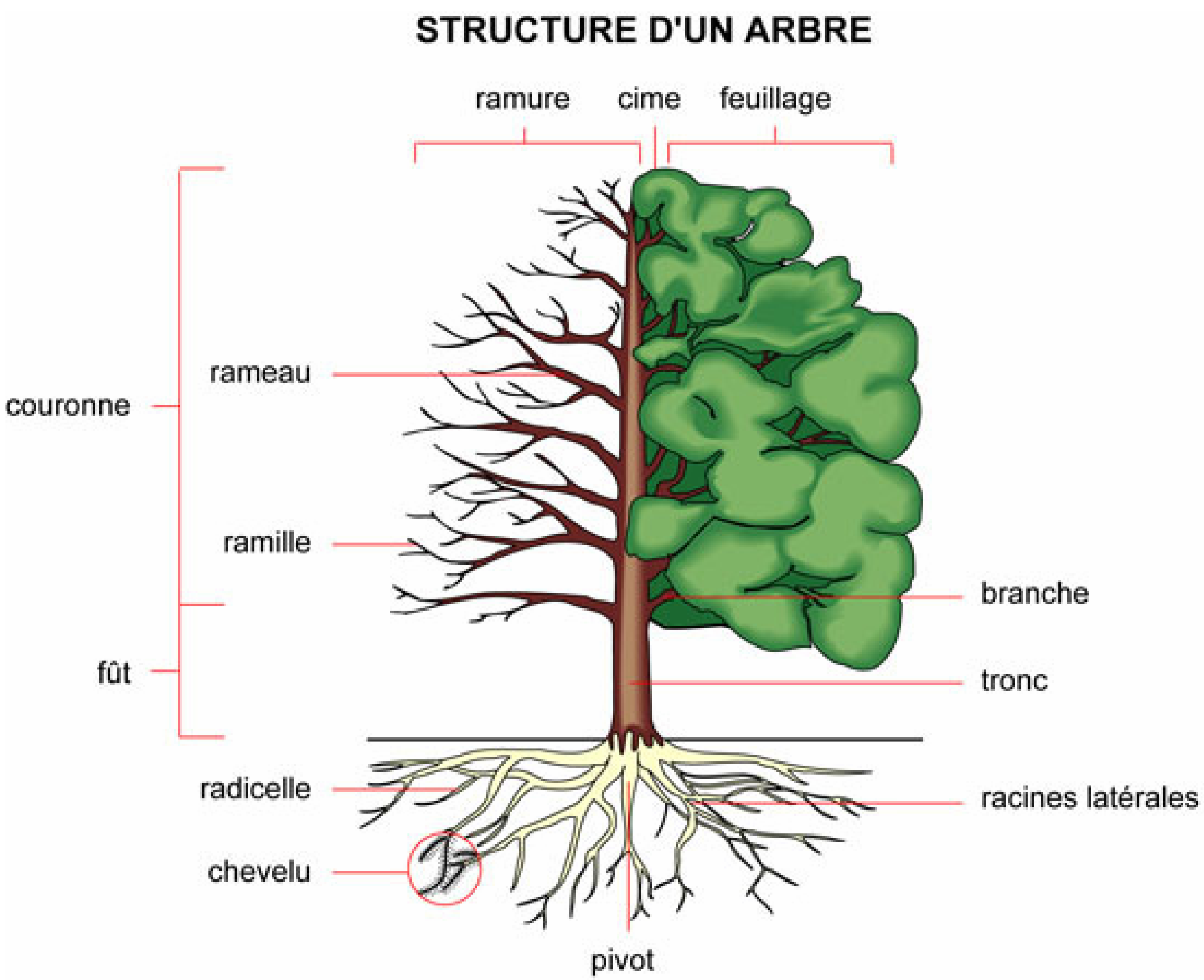
i) $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}} =$

j) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{50}} =$

k) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{100} =$

l) $\sqrt[3]{\frac{-27}{8}} + 0,\overline{3} =$

« Le mot RACINE évoque quelque chose de caché, d'enfoui comme les racines d'un arbre… »



Solutions

Ex 1 : a)81 ; b)10'000 ; c)25 ; d)144 ; e)1 ; f)0,01 ; g)64'000'000 ; h)-8 ; i)17 ; j)72 ; k)1 ; l)16/81

Ex 2 : a)27'000 ; b)360'000 ; c)81 ; d)4900 ;e)1 ; f)0,008 ; g)0,027 ; h)1 ; i)1 ; j)-1 ; k)40 ; l) $-\frac{125}{64}$

Ex 3 : a) 41 ; b) 42 ; c) -17 ; d) 16 ;

Ex 4 :

1) 2	5) 0	9) 5
2) 10	6) 1	10) 8
3) impossible	7) 11 ; 4	11) 2 ; 6
4) 6 ; 2	8) 3 ; 3	12) 0 ; 0

Ex 5 :

1) 8	4) 9 ; 2
2) 7	5) 3 ; 3
3) 8	6) 0 ; 1

Ex 6 : a) 4 ; b) $\frac{2}{5}$; c) 100 ; d) $\frac{1}{4^6}$; e) $\frac{1}{100}$; f) $\frac{1}{\pi^2}$; g) $\frac{1}{45^2}$; h) $\frac{1}{125}$; i) $\frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$; j) non défini

Ex 7 : a) $(-5)^8$; b) $3^6 \cdot (-2)^4$; c) 7^{14} ; d) 3^{11} ; e) 7^{20} ; f) $(-3)^{10}$; g) $5^{12} \cdot 3^8$; h) 4^{22}

Ex 8 : 1) $3{,}102 \cdot 10^1$; 2) $3{,}415 \cdot 10^2$; 3) $1 \cdot 10^4$; 4) $1{,}56721 \cdot 10^1$; 5) $1{,}4476 \cdot 10^1$;
6) $2{,}3056 \cdot 10^{-2}$; 7) $1{,}8519 \cdot 10^4$; 8) $9{,}99991 \cdot 10^{-1}$

Ex 9 : 1) 24,3 ; 2) 200,2 ; 3) 35'600 ; 4) 0,012 ; 5) 0,0023 ; 6) 5,624 ; 7) 73,04 ; 8) 0,001304 ;

Ex 10: 1) $1{,}45023 \cdot 10^2$; 2) $4{,}55 \cdot 10^{-2}$; 3) $2 \cdot 10^4$; 4) $7002{,}035 = 7{,}002035 \cdot 10^3$;
5) $4{,}963 \cdot 10^0$; 6) $7{,}307 \cdot 10^{-3}$; 7) $1{,}9671 \cdot 10^5$; 8) $500{,}40003 = 5{,}0040003 \cdot 10^2$;

Ex 12: 1) $3^3 = 27$ personnes ; 2) 3^{10} ; 3) 3^{18} ; 4) 3^N où N est le nombre de jours

Ex 13: a) 12 ; b) $\frac{7}{4}$; c) $-\frac{5}{8}$; d) 3 ; e) non défini ; f) $\frac{3}{5}$; g) 5 ; h) $\frac{1}{3}$; i) 3 ; j) 2 ; k) $\frac{1}{2}$; l) 9 ;

Ex 14: a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{4}{5}$; d) -2 ; e) $\frac{3}{5}$; f) 6 ; g) $3^4 = 81$; h) 3 ; i) 1 ; j) $\frac{1}{5}$; k) 10 ; l) $-\frac{7}{6}$