Chapitre 5 Les suites

5.1 Définition et généralités

Définition :
Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, donc si ***U*** est une telle suite, on aura :

$$\begin{aligned} U :\ & \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow U(n) = U_n \end{aligned}$$

U_n est le n$^{\text{ème}}$ **terme** de la suite.

Exemple :
Soit la suite U : 5 ; 7 ; 9 ; 19 ; 24 ; …
Le 4$^{\text{ème}}$ terme de la suite est 19, donc $U_4 = 19$

Terme général :
Lorsque l'on peut donner facilement une **formule** pour calculer le n$^{\text{ème}}$ terme d'une suite, on dit que l'on donne le **terme général** de la suite.

Exemple :
Le terme général d'une suite U est : $U_n = 5n - 3$

Donc : $U_1 = 5\cdot 1 - 3 = 2$ $\quad U_{20} = 5\cdot 20 - 3 = 97$
$U_2 = 5\cdot 2 - 3 = 7$ $\quad U_{64} = 5\cdot 64 - 3 = 317$

Exercice 1 :
Calculer les 4 premiers termes des suites ci-dessous dont le terme général est :

a) $A_n = 2n$ d) $D_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ g) $G_n = \ln(n)$

b) $B_n = 4n+3$ e) $E_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ h) $H_n = 100^{\frac{1}{n}}$

c) $C_n = 3n-5$ f) $F_n = (-1)^n$

Exercice 2 :
Calculer le 57$^{\text{ème}}$ termes des suites ci-dessous dont le terme général est :

a) $T_n = \sqrt{4n}$ e) $X_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{2n-90}$

b) $U_n = n^3 + 2n + 3$ f) $Y_n = \ln\left(\log(n) + n\right)$

c) $V_n = \dfrac{\log(n)}{n}$ g) $Z_n = 10^{\frac{2n}{53}}$

d) $W_n = n\cdot\left(1 + (-1)^n\right)$

***Réponses* :**

Ex 1 : a) 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; b) 7 ; 11 ; 15 ; 19 ; c) -2 ; 1 ; 4 ; 7 ; d) $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{16}$; *e)* $\frac{2}{1}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{16}{16}$;
f) -1 ; +1 ; -1 ; +1 ; g) 0 ; 0,693 ; 1,099 ; 1,386 ; h) 100 ; 10 ; 4,642 ; 3,162

Ex 2 : a) $T_{57} = 15{,}1$; *b)* $U_{57} = 185'310$; *c)* $V_{57} = 0{,}031$; *d)* $W_{57} = 0$;
e) $X_{57} = 0{,}16$; *f)* $Y_{57} = 4{,}07$; *g) 141*

5.2 Suites arithmétiques

Définition :
Une suite est **arithmétique** si chacun de ses termes (sauf le premier) est obtenu en additionnant au précédent un même nombre ***r***, appelé **raison** de la suite arithmétique.

Forme générale : $U_{n+1} = U_n + r$ *(formule de récurrence)*

Exemples :
1) Soit la suite ***U*** : $7 \xrightarrow{+3} 10 \xrightarrow{+3} 13 \xrightarrow{+3} 16 \xrightarrow{+3} 19 \ \ldots$
2) Soit la suite ***V*** : $100 \xrightarrow{-10} 90 \xrightarrow{-10} 80 \xrightarrow{-10} 70 \xrightarrow{-10} 60 \ \ldots$

Terme général d'une suite arithmétique :
Si dans la suite arithmétique ***U***, on connaît le premier terme U_1 et la raison *r*, le terme général s'écrit alors :

$$\boxed{U_n = U_1 + r \cdot (n-1)}$$

Exemples :
1) Soit la suite arithmétique ***U*** : 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; …
   On a : $U_1 = 7$ et $r = 3$. Alors le terme général s'écrit : $U_n = 7 + 3 \cdot (n-1) = 7 + 3n - 3 = \boxed{3n+4}$
2) Soit la suite arithmétique ***V*** : 100 ; 90 ; 80 ; 70 ; 60 ; …
   On a: $V_1 = 100$; $r = -10$. Le terme général est: $V_n = 100 - 10 \cdot (n-1) = 100 - 10n + 10 = \boxed{-10n+110}$

Une autre manière de voir :
« On identifie la raison puis en ajuste pour obtenir convenablement le premier terme (et les autres). »

3) Soit la suite A : 10 ; 14 ; 18 ; 22 ; 26 ; … On a le terme général : $A_n = \ldots\ldots \cdot n + \ldots\ldots$
4) Soit la suite B : 50 ; 45 ; 40 ; 35 ; 30 ; … On a le terme général : $B_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5.3 Suites géométriques

Définition :
Une suite est **géométrique** si chacun de ses termes (sauf le premier) est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre ***r***, appelé **raison** de la suite géométrique.

Forme générale : $U_{n+1} = r \cdot U_n$ *(formule de récurrence)*

Exemples :
1) Soit la suite ***U*** : $2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{\cdot 3} 18 \xrightarrow{\cdot 3} 54 \xrightarrow{\cdot 3} 162 \ \ldots$
2) Soit la suite ***V*** : $800 \xrightarrow{:2} 400 \xrightarrow{:2} 200 \xrightarrow{:2} 100 \xrightarrow{:2} 50 \ \ldots$

Remarque : Diviser par 2 ou multiplier par $\frac{1}{2}$ c'est la même chose !

Terme général d'une suite géométrique:
Si dans la suite géométrique ***U***, on connaît le premier terme U_1 et la raison *r*, le terme général s'écrit alors :

$$\boxed{U_n = U_1 \cdot r^{(n-1)}}$$

Exemples :

1) Soit la suite géométrique $\boldsymbol{U}$: 2 ; 6 ; 18 ; 54; 162 ; …

On a : $U_1 = 2$ et $r = 3$. Alors le terme général s'écrit : $\boxed{U_n = 2\cdot 3^{n-1}}$

2) Soit la suite géométrique $\boldsymbol{V}$: 800 ; 400 ; 200 ; 100 ; 50 ; …

On a : $V_1 = 800$; $r = \frac{1}{2}$. Le terme général est : $V_n = 800\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{800}{2^{n-1}}}$

Exercice 3 :

Donner le terme général et le 50$^{\text{ème}}$ terme des suites ci-dessous :

a) ***A*** : 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ;… $A_n =$ .... $A_{50} =$ ....

b) ***B*** : 11 ; 17 ; 23 ; 29 ; 35 ;… $B_n =$ .... $B_{50} =$ ....

c) ***C*** : 80 ; 70 ; 60 ; 50 ; 40 ;… $C_n =$ .... $C_{50} =$ ....

d) ***D*** : 97 ; 86 ; 75 ; 64 ; 53 ;… $D_n =$ .... $D_{50} =$ ....

Exercice 4 :

Donner le terme général et le 11$^{\text{ème}}$ terme des suites ci-dessous :

a) ***E*** : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ;… $E_n =$ .... $E_{11} =$ ....

b) ***F*** : 4 ; 12 ; 36 ; 108 ; 324 ;… $F_n =$ .... $F_{11} =$ ....

c) ***G*** : 800 ; 400 ; 200 ; 100 ; 50 ;… $G_n =$ .... $G_{11} =$ ....

d) ***H*** : 243 ; 81 ; 27 ; 9 ; 3 ;… $H_n =$ .... $H_{11} =$ ....

e) ***I*** : 40 ; 45 ; 50 ; 55 ; 60 ;… $I_n =$ .... $I_{11} =$ ....

f) ***J*** : 470 ; 450 ; 430 ; 410 ; 390 ;… $J_n =$ .... $J_{11} =$ ....

Exercice 5 :

a) Soit A une suite arithmétique. On sait que $A_4 = 33$ et $A_7 = 48$. Donner le terme général A_n

b) Soit B une suite arithmétique. Le 2$^{\text{ème}}$ terme vaut 91 et le 4$^{\text{ème}}$ 103. Donner le terme général.

c) Soit C une suite géométrique. Si le 3$^{\text{ème}}$ terme de la suite est 28 et le 6$^{\text{ème}}$ 224, que vaut C_n ?

d) Soit D une suite géométrique. Si le $D_4 = 384$ et le $D_6 = 6144$, que vaut D_n ?

e) Soit E une suite arithmétique. On sait que $E_2 = -20$ et $E_6 = 12$. Donner le terme général.

Réponses :

Ex 3 : a) $A_n = 2n+3$; $A_{50} = 103$; c) $C_n = -10n+90$; $C_{50} = -410$;

b) $B_n = 6n+5$; $B_{50} = 305$; d) $D_n = -11n+108$; $D_{50} = -442$

Ex 4 : a) $E_n = 3\cdot 2^{n-1}$; $E_{11} = 3072$; d) $H_n = \dfrac{243}{3^{n-1}}$; $H_{11} = 0,004$;

b) $F_n = 4\cdot 3^{n-1}$; $F_{11} = 236'196$; e) $I_n = 5n+35$; $I_{11} = 90$;

c) $G_n = \dfrac{800}{2^{n-1}}$; $G_{11} = 0,781$; f) $J_n = -20n+490$; $J_{11} = 270$;

Ex 5 : a) $A_n = 5n+13$; b) $B_n = 6n+79$; c) $C_n = 7\cdot 2^{n-1}$; d) $D_n = 6\cdot 4^{n-1}$; e) $E_n = 8n-36$

5.4 Suites constantes

C'est un cas particulier de la suite arithmétique, c'est le cas où la raison ***r*** de la suite égale **zéro**.

Exemples :

A : 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; …. $A_n = 6$

B : π ; π ; π ; π ; π ; π ; … $B_n =$ ……….

5.5 Suites quadratique ou suites carrées

Voici des exemples de *suites quadratiques (carrées) :*

+3 +5 +7 +9

C : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ;… $C_n = n^2$

D : 10 ; 13 ; 18 ; 25 ; 34 ; … $D_n =$ ………………..

E : -5 ; -2 ; 3 ; 10 ; 19 ; … $E_n =$ ………………..

F : 15 ; 18 ; 23 ; 30 ; 39 ; … $F_n =$ ………………..

Exercice 6 :

Donner le terme général et le 34$^{\text{ème}}$ terme des suites ci-dessous :

a) ***A*** : 5 ; 8 ; 13 ; 20 ; 29 ;… $A_n =$ …………………………………… $A_{34} =$ …………………..

b) ***B*** : 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ;… $B_n =$ …………………………………… $B_{34} =$ …………………..

c) ***C*** : -1 ; 2 ; 7 ; 14 ; 23 ;… $C_n =$ …………………………………… $C_{34} =$ …………………..

d) ***D*** : -19 ; -16 ; -11 ; -4 ; 5 ;… $D_n =$ …………………………………… $D_{34} =$ …………………..

e) ***E*** : 107 ; 110 ; 115 ; 122 ; 131 ;… $E_n =$ …………………………………… $E_{34} =$ …………………..

Exercice 7 :

Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) ***A*** : 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ;… $A_n =$ ....

b) ***B*** : 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ;… $B_n =$ ....

c) ***C*** : 17 ; 15 ; 13 ; 11 ; 9 ;… $C_n =$ ....

d) ***D*** : 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ;… $D_n =$ ....

e) ***E*** : 5 ; 2 ; -1 ; -4 ; -7 ;… $E_n =$ ....

f) ***F*** : log(5) ; log(5) ; log(5) ; log(5) ; log(5) ;… $F_n =$ ....

g) ***G*** : 80 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ;… $G_n =$ ....

h) ***H*** : -100 ; -97 ; -92 ; -85 ; -76 ;… $H_n =$ ....

i) ***I*** : 1000 ; 1200 ; 1440 ; 1728 ; 2073,6 ;… $I_n =$ ....

j) ***J*** : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ;… $J_n =$ ....

Solutions:

Ex 6 : a) $A_n = n^2 + 4$; $A_{34} = 1160$; b) $B_n = 11$; $B_{34} = 11$; c) $C_n = n^2 - 2$; $C_{34} = 1154$

d) $D_n = n^2 - 20$; $D_{34} = 1136$; e) $E_n = n^2 + 106$; $E_{34} = 1262$;

Ex 7 : a) $A_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ *(géom.)* ; b) $B_n = 5n$ *(arithm.)* ; c) $C_n = -2n + 19$ *(arithm.)*

d) $D_n = 5$ *(constante)* ; e) $E_n = -3n + 8$; f) $F_n = \log(5)$ *(constante)* ; g) $G_n = \dfrac{80}{2^{n-1}}$ *(géom.)*

h) $H_n = n^2 - 101$ *(carrée)* ; i) $I_n = 1000 \cdot 1{,}2^{n-1}$ *(géom.)* ; j) $J_n = n$ *(arithm.)*

5.6. Calcul de la place (rang) d'un terme dans la suite

Si on connaît le terme général d'une suite et l'un de ses termes, alors on peut connaître la **place** de ce terme dans la suite. On parle aussi du **rang**. Pour cela il faudra résoudre une équation.

Exemples :

1) Soit $\boxed{U_n = 7n - 8}$. On veut savoir à quelle place se trouve le terme 706 ?

Pour répondre à cette question, il faut résoudre $\boxed{7n - 8 = 706}$

On trouve : $\boxed{n = 102}$ c.à.d. à la 102ème place ! ($U_{102} = 706$)

2) Soit $\boxed{V_n = 5 \cdot 3^{n-1}}$. Quel est le rang du terme 32'805 ?

On doit résoudre : $\boxed{5 \cdot 3^{n-1} = 32'805}$

On a : $3^{n-1} = \dfrac{32'805}{5} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 \Leftrightarrow \log\left(3^{n-1}\right) = \log(6561) \Leftrightarrow$

$(n-1) \cdot \log(3) = \log(6561) \Leftrightarrow (n-1) = \dfrac{\log(6561)}{\log(3)} \Leftrightarrow (n-1) = 8$

On a : $\boxed{n = 9}$. Son rang est 9.

3) Soit $\boxed{W_n = 8n + 4}$. A quelle place se trouve le terme 845 ?

On résout : $8n + 4 = 845$

On trouve : $n = 105{,}125 \notin \mathbb{N}$

Comme ce n'est pas un nombre entier, on peut conclure que le 845 n'est pas un terme de cette suite !

<u>Exercice 8</u> :

a) $A_n = 4n - 6$; à quelle place se trouve le terme 558 ?

b) $B_n = 8 - 3n$; quel est le rang du terme -4345 ?

c) $C_n = 5 \cdot 2^{n-1}$; à quelle place se trouve le terme 1280 ?

d) $D_n = \dfrac{6561}{3^{n-1}}$; Le terme 9 est-il dans cette suite ? Si oui, quel est son rang ?

e) $E_n = n^2 + 7$; à quelle place se trouve le terme 7'928 ?

f) $F_n = n^2 - 73$; quel est le rang du terme 10'331 ?

<u>Exercice 9</u> :

a) $A_n = n^5 + 3$; à quelle place se trouve le terme 32'771 ?

b) $B_n = 10^n$; quel est le rang du terme 1'000'000 ?

c) $C_n = \log(n)$; à quelle place se trouve le terme 4 ?

d) $D_n = n^2 + 3n + 4$; Le terme 158 est-il dans cette suite ? Si oui, quel est son rang ?

e) $E_n = \sqrt[7]{n}$; à quelle place se trouve le terme 3 ?

f) $F_n = 3 \cdot 10^{4n-1}$; quel est le rang du terme 30'000'000 ?

g) $G_n = \log(n + 900)$; à quelle place se trouve le terme 3 ?

h) $H_n = 5n^2 - 3n + 8$; quel est le rang du terme 232 ?

i) $I_n = n^8 + 53$; à quelle place se trouve le terme 309 ?

j) $J_n = \sqrt[5]{n} + 19$; Le terme 23 est-il dans cette suite ? Si oui, quel est son rang ?

k) $K_n = n^2 + 19$; Le terme 164 est-il dans cette suite ? Si oui, quel est son rang ?

<u>Exercice 10</u> : Soit la suite U : 20 ; 23 ; 26 ; 29 ; 32 ;…

a) Trouver les 3 termes suivants.
b) Trouver le terme général.
c) Trouver le 1'000$^{\text{ème}}$ terme.
d) A quelle place (rang) se trouve le terme 350 ?
e) Le terme 2'367 appartient-il à cette suite ? Si oui, à quelle place ?

<u>Exercice 11</u> : Soit la suite V : -1 ; 2 ; 7 ; 14 ; 23 ;…

a) Déterminer le 6$^{\text{ème}}$ terme.
b) Trouver le terme général.
c) Calculer V_7 et V_{19}
d) Quel est le rang du terme 898 ?
e) Existe-t-il un terme valant 999 ?

<u>Exercice 12</u> : Soit la suite W : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ;…

a) Trouver les 2 termes suivants.
b) Trouver le terme général.
c) Trouver le 12$^{\text{ème}}$ terme.
d) Calculer W_7
e) A quelle place se trouve le terme 3'072 ?
f) Le terme 98'304 se trouve-t-il dans cette suite ? Si oui, à quelle place ?

<u>Exercice 13</u> : Soit la suite X : 600 ; 550 ; 500 ; 450 ; 400 ;…

a) Trouver le terme général.
b) Calculer le 52$^{\text{ème}}$ terme.
c) A quelle place se trouve le terme -8750 ?
d) 11'740 est-il dans cette suite ? Si oui, quelle est son rang ?

<u>Exercice 14</u> : Soit la suite Y dont le terme général est : $Y_n = 10^n$

a) 20'000 est-il dans cette suite ?
b) A quelle place se trouve le terme 1'000'000'000 ?
c) A quelle place se trouve le terme le plus proche de 52'927 ?

Solutions :
Ex 8 : a) $n=141$; b) $n=1'451$; c) $n=9$; d) $n=7$; e) $n=89$; f) $n=102$
Ex 9 : a) $n=8$; b) $n=6$; c) $n=10'000$; d) Oui : $n=11$ ($\Delta=625$) ; e) $n=2'187$; f) $n=2$
g) $n=100$; h) $n=7$ ($\Delta=4'489$) ; i) $n=2$; j) Oui : $n=1'024$; k) Non ($n=12,04\notin\mathbb{N}$)
Ex 10 :a) 35 ; 38 ; 41 ; b) $U_n=17+3n$; c) $U_{1000}=3017$; d) 111$^{\text{ème}}$ place ; e) non
Ex 11 :a) 34 ; b) $V_n=n^2-2$; c) $V_7=47$; $V_{19}=359$; d) 30$^{\text{ème}}$ place ; e) non
Ex 12 :a) 96 ; 192 ; b) $W_n=3\cdot 2^{n-1}$; c) $W_{12}=6144$; d) $W_7=192$; e) 11$^{\text{ème}}$ place ; f) Oui, 16$^{\text{ème}}$ place ;
Ex 13 :a) $X_n=650-50n$; b) $X_{52}=-1950$; c) 188$^{\text{ème}}$ place ; d) non
Ex 14 : a) Non car $n\approx 4,3\notin\mathbb{N}$; b) $n=9$;
c) On a $n\approx 4,73$. Entre la 4$^{\text{ème}}$ et la 5$^{\text{ème}}$ place : $Y_4=10'000$ et $Y_5=100'000$.
Donc la 4$^{\text{ème}}$ place est la plus proche.

5.7. Suites alternées

Voici des exemples de suites **alternées** :

A : –1 ; +1 ; –1 ; +1 ; –1 ; +1 ; …

B : +1 ; –1 ; +1 ; –1 ; +1 ; –1 ; …

$A_n=$ ....

$B_n=$ ....

C : –3 ; +6 ; –9 ; +12 ; –15 ; +18 ; …

D : +10 ; –13 ; +18 ; –25 ; +34 ; –45 ; …

Terme général d'une suite alternée
Pour trouver le terme général d'une suite **alternées** on procède comme suit :
- S'assurer que la suite est bien alternée !
- Si le premier terme est **négatif**, mettre $(-1)^n$ en facteur.
- Si le premier terme est **positif**, mettre $(-1)^{n+1}$ en facteur.
- Compléter par le facteur manquant en oubliant tous les signes. (Traiter la suite comme si elle n'était pas alternée.)

Exemple :
Trouver le terme général de la suite ***U*** : +4 ; –9 ; +14 ; –19 ; +24 ; –29 ; …
On a que :
- Cette suite est bien alternée.
- Le 1$^{\text{er}}$ terme est positif, donc le facteur sera $(-1)^{n+1}$
- On considère la suite sans les signes : 4 ; 9 ; 14 ; 19 ; 24 ; 29 ; … c'est une suite arithmétique !

Donc : $\boxed{U_n=(-1)^{n+1}\cdot(5n-1)}$

Exemples :
C : –3 ; +6 ; –9 ; +12 ; –15 ; +18 ; … $C_n=$ ....

D : +10 ; –13 ; +18 ; –25 ; +34 ; –45 ; … $D_n=$ ....

Exercice 15 :
Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) ***A*** : -500 ; 400 ; -300 ; 200 ; -100 ;… $A_n =$ ....

b) ***B*** : 4 ; -7; 12 ; -19 ; 28 ;… $B_n =$ ....

c) ***C*** : 1000 ; -1200 ; 1440 ; -1728 ; $2073{,}6$;… $C_n =$ ....

d) ***D*** : -6 ; 17 ; -28 ; 39 ; -50 ;… $D_n =$ ....

e) ***E*** : 12 ; -15 ; 20 ; -27 ; 36 ;… $E_n =$ ....

f) ***F*** : 6 ; -6 ; 6 ; -6 ; 6 ;… $F_n =$ ....

g) ***G*** : -20 ; 40 ; -80 ; 160 ; -320 ;… $G_n =$ ....

Exercice 16 :
Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) ***A*** : 4 ; -7 ; 10 ; -13 ; 16 ;… $A_n =$ ....

b) ***B*** : -7 ; 10 ; -15 ; 22 ; -31 ;… $B_n =$ ....

c) ***C*** : -10 ; 20 ; -40 ; 80 ; -160 ;… $C_n =$ ....

d) ***D*** : -5 ; -1 ; 3 ; 7 ; 11 ;… $D_n =$ ....

Solutions:

Ex 15: a) $A_n = (-1)^n \cdot (-100n + 600)$ d) $D_n = (-1)^n \cdot (11n - 5)$ g) $G_n = (-1)^n \cdot 20 \cdot 2^{n-1}$

b) $B_n = (-1)^{n+1} \cdot (n^2 + 3)$ e) $E_n = (-1)^{n+1} \cdot (n^2 + 11)$

c) $C_n = (-1)^{n+1} \cdot 1000 \cdot 1{,}2^{n-1}$ f) $F_n = (-1)^{n+1} \cdot 6$

Ex 16: a) $A_n = (-1)^{n+1} \cdot (3n + 1)$ c) $C_n = (-1)^n \cdot 10 \cdot 2^{n-1}$

b) $B_n = (-1)^n \cdot (n^2 + 6)$ d) *pas alternée :* $D_n = 4n - 9$

5.8. Suites rationnelles

Définition :
Une suite **rationnelle** est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$, donc si ***U*** est une telle suite, chaque terme de la suite est un nombre rationnel.

Exemples :

Soit la suite ***U*** : $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{9}{15}$; $\frac{16}{21}$; $\frac{25}{27}$; …

Soit la suite ***V*** : $-\frac{6}{10}$; $\frac{9}{20}$; $-\frac{12}{40}$; $\frac{15}{80}$; $-\frac{18}{160}$; …

Terme général :
Lorsqu'une suite est **rationnelle**, pour trouver le terme général de cette suite, il faut traiter séparément le **numérateur** et le **dénominateur** et déterminer dans chaque cas le terme général. Pour terminer on réunit ces deux résultats.

Exemple :

Soit la suite $\boldsymbol{U}$: $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{17}{21}$; $\frac{26}{27}$; …

Le suite du numérateur $\boldsymbol{N}$: 2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; … a pour terme général : $N_n = n^2 + 1$

Le suite du numérateur $\boldsymbol{D}$: 3 ; 9 ; 15 ; 21 ; 27 ; … a pour terme général : $D_n = 6n - 3$

Le terme général de la suite $\boldsymbol{U}$ est : $\boxed{U_n = \frac{n^2+1}{6n-3}}$

Exercice 17 :

Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) $\boldsymbol{A}$: $\frac{7}{14}$; $\frac{10}{23}$; $\frac{15}{32}$; $\frac{22}{41}$; $\frac{31}{50}$;... $A_n =$ ....

b) $\boldsymbol{B}$: $\frac{4}{5}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{16}{13}$; $\frac{32}{17}$; $\frac{64}{21}$;... $B_n =$ ....

c) $\boldsymbol{C}$: $\frac{4}{6}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{14}$; $\frac{4}{21}$; $\frac{4}{30}$;... $C_n =$ ....

d) $\boldsymbol{D}$: $\frac{14}{600}$; $\frac{17}{570}$; $\frac{20}{540}$; $\frac{23}{510}$; $\frac{26}{480}$;... $D_n =$ ....

e) $\boldsymbol{E}$: $-\frac{6}{10}$; $\frac{9}{20}$; $-\frac{12}{40}$; $\frac{15}{80}$; $-\frac{18}{160}$;... $E_n =$ ....

f) $\boldsymbol{F}$: $\frac{10}{4}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{12}{12}$; $\frac{13}{19}$; $\frac{14}{28}$;... $F_n =$ ....

g) $\boldsymbol{G}$: $-\frac{75}{8}$; $\frac{70}{13}$; $-\frac{65}{18}$; $\frac{60}{23}$; $-\frac{55}{28}$;... $G_n =$ ....

h) $\boldsymbol{H}$: $\frac{2}{3}$; $\frac{10}{6}$; $\frac{50}{12}$; $\frac{250}{24}$; $\frac{1250}{48}$;... $H_n =$ ....

i) $\boldsymbol{I}$: $\frac{7}{3}$; $-\frac{10}{3}$; $\frac{15}{3}$; $-\frac{22}{3}$; $\frac{31}{3}$;... $I_n =$ ....

Solutions:

Ex 17: a) $A_n = \frac{n^2+6}{9n+5}$ d) $D_n = \frac{11+3n}{630-30n}$ g) $G_n = (-1)^n \cdot \frac{80-5n}{3+5n}$

b) $B_n = \frac{4 \cdot 2^{n-1}}{4n+1}$ e) $E_n = (-1)^n \cdot \frac{3+3n}{10 \cdot 2^{n-1}}$ h) $H_n = \frac{2 \cdot 5^{n-1}}{3 \cdot 2^{n-1}}$

c) $C_n = \frac{4}{n^2+5}$ f) $F_n = \frac{n+9}{n^2+3}$ i) $I_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2+6}{3}$

5.9. Quelques autres suites

• Suite ***cubique*** C :	1 ; 8 : 27 ; 64 ; 125 ; …	$C_n =$...............
• Suite ***exponentielle*** E :	1 ; 4 ; 27 ; 256 ; 3'125 ; …	$E_n =$...............
• Suite ***factorielle*** F :	1 ; 2 ; 6 ; 24 ; 120 ; …	$F_n =$............... *(voir ch. 6)*

Exercice 18* :

Donner le terme général des suites ci-dessous :

a) ***K*** : 1 ; 16 ; 81 ; 256 ; 625 ;… $K_n =$..

b) ***L*** : 1 ; 3; 6 ; 10 ; 15 ;… $L_n =$..

c) ***M*** : 0 ; 2 ; 0 ; 2 ; 0 ; … $M_n =$..

d) ***N*** : 2 ; 0 ; 2 ; 0 ; 2 ; … $N_n =$..

e) ***P*** : $\frac{1}{2}$; 1 ; 3 ; 12 ; 60 ;… $P_n =$..

Remarques :

- $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$; par exemple : $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$
- $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = 1+2+3+\ldots.+(n-1)+n$; par exemple : $1+2+3+4+5+6 = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$

Solutions :

Ex 18: a) $K_n = n^4$ *; b)* $L_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ *; c)* $M_n = 1+(-1)^n$ *; d)* $N_n = 1+(-1)^{n+1}$ *; e)* $P_n = \frac{n!}{2}$

5.10 Suites définies par récurrence

Lorsqu'on donne le premier terme d'une suite, puis la règle de calculer le n$^{\text{ème}}$ terme partir du $(n-1)^{\text{ème}}$ terme, ou du $(n-2)^{\text{ème}}$, etc. ; ce procédé s'appelle la **récurrence** !
Ainsi avec une **formule de récurrence**, en connaissant U_1, on peut calculer U_2, puis U_3, …

Exemple 1 :

On donne la formule de récurrence: $U_n = 3\cdot U_{n-1}$ et $U_1 = 5$

On calcule : $U_2 = 3\cdot U_{2-1} = 3\cdot U_1 = 3\cdot 5 = 15$

$U_3 = 3\cdot U_{3-1} = 3\cdot U_2 = 3\cdot 15 = 45$

$U_4 = 3\cdot U_{4-1} = 3\cdot U_3 = 3\cdot 45 = 135$

On reconnaît une suite géométrique de raison 3.

Exemple 2 :
Soit la suite $1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ...$

On peut trouver les termes suivants : $1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ;$ .... ; .... ; .... ; .... ; .... ;...

On obtient le 100ème terme en ……………………………………………………………………………

Ce qui s'écrit : $U_{100} =$ ....

Et de manière générale : ………………………………………………………………

Remarque : Cette suite porte le nom d'un mathématicien… Lequel ?

Exercice 19 :
Pour chaque suite donnée par récurrence, calculer les 4 premiers termes.

a) $U_n = (U_{n-1})^2 + 2$ et $U_1 = 2$

b) $V_n = 2 \cdot V_{n-1} - 4$ et $V_1 = -5$

c) $W_n = \dfrac{W_{n-1}}{2} + 1$ et $W_1 = 3$

d) $X_n = 3 \cdot (X_{n-1})^2$ et $X_1 = 1$

Exercice 20 :
Pour chaque suite donnée par récurrence, calculer les 4 premiers termes.

a) $U_n = 3 \cdot U_{n-1} + 2$ et $U_1 = 4$

b) $V_n = 4 \cdot V_{n-1} + 3$ et $V_1 = 1$

c) $W_n = \sqrt{W_{n-1} + 2}$ et $W_1 = 2$

d) $Y_n = (Y_{n-1})^2 + 1$ et $Y_1 = 4$

e) $Z_n = \sqrt[3]{(Z_{n-1} + 2)^2}$ et $Z_1 = 6$

f) $A_n = (A_{n-1})^3 + 1$ et $A_1 = 1$

g) $B_n = \dfrac{1}{B_{n-1}}$ et $B_1 = 2$

h) $C_n = (C_{n-1})^2$ et $C_1 = 5$

i) $D_n = \sqrt{D_{n-1}} + 2$ et $D_1 = 9$

j) $E_n = \sqrt[3]{(E_{n-1})^2 + 1}$ et $E_1 = 2$

Exercice 21 :
Pour chaque suite donnée par récurrence, donner le **terme général**.

a) $U_n = U_{n-1} + 6$ et $U_1 = 4$

b) $V_n = 3 \cdot V_{n-1}$ et $V_1 = 2$

c) $W_n = W_{n-1} + 2n - 1$ et $W_1 = 1$

d) $X_n = X_{n-1} + 2$ et $X_1 = -7$

Exercice 22 :
On donne la récurrence suivante : $U_n = 3n^2 - U_{n-1} - U_{n-2} - 6n + 23$ avec $U_1 = 7$ et $U_2 = 10$

a) Calculer U_3 , U_4 et U_5

b) Déterminer le terme général U_n de cette suite.

c) Calculer U_{163}

Exercice 23 :
On donne la récurrence suivante : $U_n = 4n^2 - 8n - 18 - 2 \cdot U_{n-1} - U_{n-2}$ avec $U_1 = -5$ et $U_2 = -2$

a) Calculer U_3 , U_4 et U_5

b) Déterminer le terme général U_n de cette suite.

c) Calculer U_{604}

Exercice 24 :
On donne la récurrence suivante : $U_n = 2 \cdot U_{n-2} - U_{n-1} + 9$ avec $U_1 = 1$ et $U_2 = 4$

a) Calculer U_3 , U_4 et U_5

b) Déterminer le terme général U_n de cette suite.

c) Combien y-a-t-il de termes dans cette suite qui sont compris entre 10'000 et 20'000 ?

Exercice 25 :
On donne la récurrence suivante : $U_n = \dfrac{U_{n-1}}{4} + 3n + 13$ avec $U_1 = 20$

a) Trouver les 5 premiers termes
b) Trouver le terme général de cette suite.
c) Trouver le 100ème terme.

Exercice 26 :
On donne la récurrence suivante : $U_n = \dfrac{(n-1) \cdot U_{n-1}}{n}$ avec $U_1 = 1$

a) Trouver les 5 premiers termes *(laisser en fractions).*
b) Trouver le terme général de cette suite.
c) Calculer le 100ème terme.

Exercice 27 :
Soit la suite définie par : $U_n = 2 \cdot U_{n-1}$ avec $U_1 = 5$

a) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
b) Déterminer le terme général de cette suite.
c) Calculer le 14ème terme.

Exercice 28 :
Soit la suite définie par : $U_n = 4 \cdot U_{n-1} - 9n + 6$ avec $U_1 = 5$

a) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
b) Déterminer le terme général de cette suite.
c) Calculer le 333ème terme.

Exercice 29 :
Soit la suite définie par : $U_n = U_{n-1} + 2n - 1$ avec $U_1 = 4$

Mêmes questions que l'exercice 27.

Solutions :

Ex 19: a) 2 ; 6 ; 38 ; 1446 ; b) -5 ; -14 ; -32 ; -68 ; c) 3 ; 2,5 ; 2,25 ; 2,125 ; d) 1 ; 3 ; 27 ; 2187

Ex 20: a) U : 4 ; 14 ; 44 ; 134 ; *f) A : 1 ; 2 ; 9 ; 730 ;*
b) V : 1 ; 7 ; 31 ; 127 ; *g) B : 2 ; ½ ; 3 ; ½ ;*
c) W : 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; *h) C : 5 ; 25 ; 625 ; 390'625 ;*
d) Y : 4 ; 17 ; 290 ; 84'101 ; *i) D : 9 ; 5 ; 4,236 ; 4,058 ;*
e) Z : 6 ; 4 ; 3,302 ; 3,041 ; *j) E : 2 ; 1,710 ; 1,577 ; 1,516 ;*

Ex 21: a) $U_n = 6n-2$ *; b)* $V_n = 2\cdot 3^{n-1}$ *; c)* $W_n = n^2$ *; d)* $X_n = 2n-9$

Ex 22: a) 15 ; 22 ; 31 ; b) $U_n = n^2+6$ *; c)* $U_{163} = 26'575$

Ex 23: a) 3 ; 10 ; 19 ; b) $U_n = n^2-6$ *; c)* $U_{604} = 364'810$

Ex 24: a) 7 ; 10 ; 13 ; b) $U_n = 3n-2$ *; c)* $N = 6667-3334+1 = 3'334\,termes$

Ex 25: a) 20 ; 24 ; 28 ; 32 ; 36 ; b) $U_n = 4n+16$ *; c)* $U_{100} = 416$

Ex 26: a) 1/1 ; 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5 ; b) $U_n = \frac{1}{n}$ *; c)* $U_{100} = \frac{1}{100}$

Ex 27: a) 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ; b) $U_n = 5\cdot 2^{n-1}$ *; c)* $U_{14} = 40'960$

Ex 28: a) 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; b) $U_n = 3n+2$ *; c)* $U_{333} = 1'001$

Ex 29: a) 4 ; 7 ; 12 ; 19 ; 28 ; b) $U_n = n^2+3$ *; c)* $U_{333} = 110'892$

5.11 Sommes

5.11.1 Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

Si ***U*** est une suite **arithmétique** de raison ***r*** et de premier terme U_1, alors la somme des ***n*** premier termes de cette suite, notée S_n, est donnée par la formule suivante :

$$\boxed{S_n = \left(\frac{U_1+U_n}{2}\right)\cdot n}$$

Exemple :
Soit la suite arithmétique ***U*** : 5 ; 12 ; 19 ; 26 ; 33 ; 40 ; 47 ; 54 ; …
On veut calculer la somme des 8 premiers termes de cette suite.
On a : $U_1 = 5$; $U_8 = 54$; $n = 8$

Donc : $S_8 = \left(\frac{5+54}{2}\right)\cdot 8 = 236$

Exercice 30 :
Calculer les sommes ci-dessous :

a) $18+23+28+33+38+43+48+53+58=$

b) $1+2+3+4+...+199+200=$

c) $90+91+92+...+149+150=$

d) $20+28+36+...+404+412=$

Exercice 31 :

Calculer les sommes suivantes :

a) $\log\left(2^1\right)+\log\left(2^2\right)+\log\left(2^3\right)+...+\log\left(2^{49}\right)+\log\left(2^{50}\right)=$

b) $\log\left(3^4\right)+\log\left(3^5\right)+\log\left(3^6\right)+...+\log\left(3^{16}\right)+\log\left(3^{17}\right)=$

c) $2+\log\left(7^1\right)+4+\log\left(7^2\right)+6+...+\log\left(7^{22}\right)=$

Exercice 32 :

Soit la suite ***U*** : 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; …

Déterminer :

a) la raison ***r***

b) le premier terme U_1

c) le terme général

d) le 100$^{\text{ème}}$ terme

e) S_{100}

f) la somme des 74 premiers termes.

Exercice 33 :

Le terme général d'une suite arithmétique ***U*** est donnée par : $U_n = 2n-3$

Déterminer :

a) la raison ***r***

b) U_{28}

d) S_{28}

e) le rang du terme 195

Exercice 34 :

Calculer les sommes suivantes :

a) $54+57+60+...+270+273=$

b) $10+20+30+...+1770+1780=$

c) $1040+1035+1030+...+615+610=$

d) Calculer la somme des 89 premiers termes de la suite :
U : 4 ; 7 ; 3 ; -2 ; 4 ; 7 ; 3 ; -2 ; 4 ; 7 ; 3 ; -2 ; …

e) Calculer la somme des 106 premiers termes de la suite :
V : -3 ; 2 ; 5 ; 6 ; -3 ; 2 ; 5 ; 6 ; -3 ; 2 ; 5 ; 6 ; -3 ; …

f) Calculer la somme des 193 premiers termes de la suite :
W : 1 ; 3 ; 7 ; -5 ; 8 ; 1 ; 3 ; 7 ; -5 ; 8 ; 1 ; 3 ; 7 ; -5 ; 8 ; …

g) Calculer la somme des 67 premiers termes de la suite :
X : -3 ; 11 ; 4 ; -3 ; 11 ; 4 ; -3 ; 11 ; 4 ; -3 ; 11 ; 4 ; …

Exercice 35* : *(Indication : systèmes de 2 équations à 2 inconnues)*
Répondre aux questions sachant que dans chaque cas, il s'agit de suites arithmétiques.
a) $U_{47} = 271$ et $S_{64} = 11'776$, que vaut la raison r ?
b) $U_{15} = 53$ et $U_{39} = 149$, que vaut la raison r ?
c) $S_{18} = 1'107$ et $S_{67} = 15'611$, que vaut la raison r ?
d) $U_{87} = 426$ et $S_{105} = 26'880$, que vaut la raison r ?
e) $S_{19} = 817$ et $r = 4$, que vaut le premier terme U_1 ?

Solutions :
Ex 30: a) 342 ; b) 20'100 ; c) 7'320 ; d) 10'800
Ex 31: a) 383,813 ; b) 70,137 ; c) 719,810
Ex 32: a) $r = 3$ *; b)* $U_1 = 4$ *; c)* $U_n = 3n + 1$ *; d)* $U_{100} = 301$ *;e)* $S_{100} = 15'250$ *; f)* $S_{74} = 8'399$
Ex 33: a) $r = 2$ *; b)* $U_{28} = 53$ *; c)* $S_{28} = 728$ *; d) le rang est 99*
Ex 34: a) 12'099 ; b) 159'310 ; c) 71'775 ; d) 268 ; e) 259 ; f) 543 ; g) 261
Ex 35: a) $r = 6$ *; b)* $r = 4$ *; c)* $r = 7$ *; d)* $r = 5$ *; e)* $U_1 = 7$

5.11.2 Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

Si ***U*** est une suite **géométrique** de raison ***r*** et de premier terme U_1, alors la somme des ***n*** premier termes de cette suite, notée S_n, est donnée par la formule suivante :

$$\boxed{S_n = \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \cdot U_1}$$

Exemple :
Soit la suite géométrique ***U*** : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ; 192 ; …
On veut calculer la somme des 15 premiers termes de cette suite.
On a : $r = 2$; $U_1 = 3$; $n = 15$

Donc : $S_{15} = \left(\frac{1-2^{15}}{1-2}\right) \cdot 3 = 98'301$

Exercice 36 :
Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, calculer la somme des 23 premiers termes.
a) ***U*** : 7 ; 14 ; 28 ; 56 ; 112 ; 224 ; …

b) ***V*** : 5 ; 15 ; 45 ; 135 ; 405 ; 1215 ; …

c) ***W*** : 10 ; 50 ; 250 ; 1'250 ; 6'250 ; 31'250 ; …

d) ***X*** : 6 ; 24 ; 96 ; 384 ; 1'536 ; 6'144 ; …

e) ***Y*** : 1'000 ; 1'200 ; 1'440; 1'728 ; 2073,6 ; …

Exercice 37 :
Calculer la somme des 10 premières puissances de 2.

Exercice 38 :
Soit une suite géométrique ***U***, sachant que $r = 3$ et $S_7 = 4'372$, calculer le premier terme U_1.

Exercice 39 :
Soit une suite géométrique ***U***, sachant que $U_6 = 3'072$ et $U_1 = 3$, calculer S_9.

Solutions :

Ex 36 : a) $S_{23} = 58'720'249$ *; b)* $S_{23} = 2,354 \cdot 10^{11}$ *;*

c) $S_{23} = 2,980 \cdot 10^{16}$ *; d)* $S_{23} = 1,407 \cdot 10^{14}$ *; e)* $S_{23} = 326'236,863$

Ex 37 : $S_{10} = 2046$ *; Ex 38 :* $U_1 = 4$ *; Ex 39 :* $r = 4$ *;* $S_9 = 262'143$

---

12 Problèmes

Exercice 40 :
On constate qu'une population d'insectes augmente de 20 % chaque jour.
a) Que deviendra une population de 30'000 insectes après 3 jours.
b) Etablir le loi exprimant le nombre d'insectes que contient une population en fonction du temps (en jours).
c) Quel temps faudra-t-il pour qu'une population d'insectes passe de 7'800 à 12'000 insectes ?

Exercice 41 :
Il existe des filtres qui absorbent 10 % des poussières contenues dans l'air.
a) Que deviendront 2'000 kg de poussière après avoir traversé 4 filtres ?
b) Etablir la loi exprimant la quantité de poussière contenue dans l'air en fonction du nombre de filtres traversés.
c) Calculer le nombre minimum de filtres nécessaires pour ramener la masse de poussière contenue dans une masse d'air de 2'400 kg à 500 kg.

Exercice 42 :
Il existe une conduite d'eau qui perd 2 % d'eau par kilomètre.
a) Que deviendra une quantité de 60'000 litres d'eau transportée sur 4 Km ?
b) Etablir la loi exprimant la quantité d'eau restante en fonction de la longueur parcourue.
c) Calculer le nombre minimum de kilomètres à parcourir pour que la quantité d'eau transportée passe de 50'000 litres à 20'000 litres.

Exercice 43 :
On constate que le nombre de bactéries augmente de 8 % chaque heure.
a) Que deviendront 10'000 bactéries après 7 heures ?
b) Etablir le loi exprimant le nombre bactéries contenues dans une culture en fonction du temps (en heures).
c) Quel temps faudra-t-il pour qu'un nombre de bactéries passe de 4'500 à 17'830 ?

Solutions :

Ex 40 : a) 51'840 insectes ; b) $P = P_0 \cdot 1,2^n$ *; c) 2,363 jours*

Ex 41 : a) 1'312,2 kg ; b) $M = M_0 \cdot 0,9^n$ *; c) 15 filtres*

Ex 42 : a) 55'342,090 litres ; b) $V = V_0 \cdot 0,98^n$ *; c) 46 km*

Ex 43 : a) 17'138 bactéries ; b) $N = N_0 \cdot 1,08^n$ *; c) 17,890 h = 17h 53min 23sec*