6. Algèbre : calcul littéral et équations du 1er degré.

§ 6.1 Calcul littéral

Définition :
Le calcul littéral consiste principalement[1] à regrouper (réduire) des ***expressions algébriques***.
Une expression algébrique est une succession de nombres et de lettres. Les lettres désignent des variables ou des inconnues.

Exemples :

1) $2x+5+4x-7=$

2) $4xy+5-3xy-3+2x=$

3) $3a^2b+2ab-4+b+2a^2b-4ab+3b=$

4) $-x+3y+4x-4y=$

5) $x\cdot 2x+y+y=$

La distributivité : $a\cdot(b+c)=ab+bc$

Exemples :

1) $3\cdot(4+x)=$

2) $x\ \ (x+2)=$

3) $2x\cdot(x+2x)=$

4) $-2\cdot(x+y)=$

5) $-3x\ (1+x)=$

6) $-(x+2)=$

7) $-(2x-3)=$

Exercice 1 :
Réduire les expressions suivantes :

1) $2a^3+8a^2-3a^3-5a^2-a^3=$

2) $2x+3y+4x^2-3x-2y-4x=$

3) $5a^2-6a^2=$

4) $-3x+8x^2-6x-5x^2=$

5) $\left(8x^3-2x+6\right)+\left(-2x^3-3x+5\right)=$

6) $\left(-2a^2+5\right)+\left(+3a^2-2a-8\right)=$

[1] Les factorisations font également partie du calcul littéral et d'une manière générale toutes les opérations d'addition, soustraction et multiplication des expressions algébriques.

Exercice 2 :
Calculer et réduire:

1) $(-x)\cdot x=$

2) $(-b)\cdot(-1)=$

3) $3\cdot(-5a)\cdot(-2)=$

4) $(-2x)\cdot(-5x^3)=$

5) $-(-5b+2c)+(-3c+4b)=$

6) $(-2a)\cdot(a^2-3a+5)-(2a^2-5a)=$

Exercice 3
Calculer et réduire:

1) $3\cdot(7\mathrm{x})=$

2) $-3a\cdot(a^2)=$

3) $4\cdot(3a^2)-5a+3\cdot(2a)=$

4) $5\cdot(x+3)=$

5) $(x^2+3)\cdot x=$

6) $4\cdot(x^2-5x)+2\cdot(2x+3x^2)=$

7) $5\cdot(x-y)=$

8) $a^2\cdot(3a^2-a+2)=$

9) $-(2a-4)=$

10) $3\cdot(5x-2)-(8x+4)=$

11) $-(-8a+3b)-(5a-2b+1)=$

12) $2x\cdot(x^2-3x)+(x^3+5x^2)\cdot 4=$

13) $(-3a+2b)\cdot(-4)-(2a-b)=$

Exercice 4
Calculer et réduire:

1) $4\cdot(5x-8)-(3x-5)=$

2) $5x\cdot(x^2-2x)+(3x^3+x^2)\cdot 3=$

3) $(3x+4y)\cdot(-3)-(3x+y)=$

4) $3a\cdot(5a-2)-(8a^2-5a)=$

5) $x\cdot(x^2-x)+(x^3+x^2)\cdot 2=$

6) $(a-3)\cdot(-3a)-(-3a^2+8a)=$

Exercice 5

Calculer et réduire:

1) $3a \cdot 4a^3 - \left(8a^3 - 5a^4\right) + 3a^3 =$

2) $-\left(5x^2 + 3y\right) + \left(2y - 4x^2\right) =$

3) $(-3a + b) \cdot (-ab) - \left(-2a^2b - ab^2\right) =$

4) $5x \cdot (-3) + 2 \cdot (5x - 1) + 3 =$

5) $-\left(x^3 + 3ax\right) - \left(-x^3 + 5ax\right) =$

6) $(-4x + 2) \cdot (-3) - 2 - 3x =$

Exercice 6

Calculer et réduire:

1) $8x^4 + 8x^4 =$

2) $-3a^3 - 3a^3 \cdot 4 - 4a \cdot 3a^2 =$

3) $\left(4x - 2x^2\right) \cdot 2 + 5x \cdot (x - 8) =$

4) $-\left(-3a^3 - 3a - 3\right) =$

5) $\left(6x^3 - 8x^2 + 12\right) \cdot \left(-5x^5\right) =$

6) $(6a + 9b - c) + (-12b - 15c - 11a) =$

7) $-(5x - y) - (-7x - 8y) =$

Exercice 7

Calculer et réduire:

1) $-(-3a + 4b - 5c) + (-a - 2b + 3c) =$

2) $(7x - 3 + 2y) \cdot (-2) + 5x - 6 \cdot (-x + y + 1) =$

3) $-3x \cdot (x - y) - (-2x - 3xy + 2) + (x - y) \cdot (-x) =$

4) $-2 \cdot \left(3a - a^2\right) - 9 \cdot \left(4a + 5a^2\right) =$

5) $-4a \cdot (a - b) - (-2a - 3ab + 3) + (a - b) \cdot (-b) =$

6) $-6 \cdot \left(5x - x^2\right) - 3 \cdot \left(4x + 3x^2\right) =$

7) $-\left(-2a^2 + 3a + 2ab\right) - 5a \cdot (b - a) + (a - 2) \cdot (-a) =$

* * *

La maitrise du calcul littéral est indispensable pour la résolution d’équation.

§ 6.2 Equations et techniques de résolution :

Vocabulaire :
- Une ***équation*** (à une inconnue) est une égalité qui contient une inconnue (un nombre souvent désigné par la lettre x).
- Une ***solution*** de l'équation est un nombre qui *substitué* dans l'équation (en lieu et place de la lettre) rend l'égalité vraie.
- ***Résoudre*** une équation signifie « trouver toutes ses solutions ».

Exemple :
$x^2 - 3x = 2 - 4x$ est une équation d'inconnue x

- 3 n'est pas une solution car : ……………………………………………
- Le nombre 1 est une solution car : ………………………………………….
- Une autre solution est $x = (-2)$, car : ……………………………………………

Remarque :
Il n'y a pas besoin de savoir résoudre une équation pour tester si, oui ou non, un nombre donné est solution. Et il est toujours possible d'effectuer une vérification quand on pense avoir trouvé une solution.

Exercice 8 :
a) Montrer que 2 est solution de l'équation $5x + 1 = 2x + 7$

b) Montrer que $\frac{3}{2}$ est solution de l'équation $3x - 8 = 5x - 11$

Définition :
On dit que deux équations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Les techniques de résolution des équations s'appuient sur les propriétés ci-dessous.

Les propriétés de l'égalité :
- Une égalité vraie reste vraie :
  - P1 : si on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres ;
  - P2 : si on multiplie ou divise les deux membres par un même nombre non nul.
- Enfin, si on ajoute ou si l'on soustrait deux égalités vraies on obtient une égalité vraie.

Exemples :

a) $x+13=8$

b) $x-14=8$

Exercice 9 :

Résoudre les équations suivantes : (voir P1)

a) $x-15=-12$

d) $17+x=15$

b) $x+13=-14$

e) $17-x=15$

c) $x+12=6$

f) $15=18+x$

Exercice 10 :

Est-ce que 3 est solution de l'équation $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{5x+1}{4}=\dfrac{x+2}{5}-\dfrac{4x-3}{3}$?

Exercice 11 :

a) Est-ce que 1 est solution de l'équation $3x-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{7x+4}{2}-2$?

b) Est-ce que -1 est solution de l'équation $3x-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{7x+4}{2}-2$?

L'utilisation des propriétés P1 et P2 permet la résolution d'équations plus complexes.

Exemples :

a) $3x=-24$ b) $\frac{x}{3}=9$ c) $3x+5=17$

Exercice 12 :
Résoudre les équations suivantes :

a) $x+10=-11$ b) $13x=-169$ c) $x-12=-18$ d) $\frac{x}{4}=-12$

e) $\frac{x}{12}=10$ f) $-5x=125$ g) $32=4x$ h) $2x+3=43$

Exercice 13 :

a) Montrer que $\frac{5}{2}$ est solution de l'équation $x^2-\frac{3}{2}x+4=2x^2-2x-1$

b) Est-ce que $-\frac{1}{2}$ est solution de l'équation $x^3+\frac{5}{2}x^2=\frac{1}{2}+2x-x^2$?

Exercice 14 :
Résoudre les équations suivantes :

a) $3x+22=-11$

b) $\frac{x}{12}+2=10$

c) $4x-11=-11$

d) $\frac{x}{5}+7=-8$

Pour résoudre une équation on la transforme, par étape. Il faut bien sûr qu'à chaque étape, les équations obtenues soient équivalentes.

Méthode :

- Simplifier au maximum chacun des membres en utilisant les propriétés du calcul littéral (développer, distribuer, réduire, …) pour se ramener à une équation plus facile à résoudre.
- Isoler et regrouper les termes contenant l'inconnue dans un membre de l'égalité (par exemple à gauche) et les autres dans l'autre membre (par exemple à droite). Pour cela on utilise les propriétés de l'égalité.
- Conclure en donnant l'ensemble solution, noté S.

Exemple :

$9(x+1)-4x=5-x-3$ (on effectue la distributivité)

$9x+9-4x=5-x-3$ (on réduit les deux membres)

$5x+9=2-x$ (on « passer » le x à gauche et le 9 à droite)

$5x+x=2-9$

$6x=-7$ (on divise les deux membres par 6)

$x=-\frac{7}{6}$

$\boxed{S=\left\{-\frac{7}{6}\right\}}$

Trois situations sont possibles :

1) Une équation admet *une solution* ***a*** (ou plusieurs si l'équation est d'ordre supérieur à 1). On écrit alors : $S=\{a\}$
2) Une équation n'admet *pas de solution*. On écrit alors $S=\phi$ ou $S=\{\}$.
3) Une équation admet une *infinité de solutions*. On écrit alors : $S=\mathbb{R}$

Exemples :

1) $2x+3=2x+8$
   $2x-2x=8-3$
   $0=5$
   Or comme $0\neq 5$,
   on a obtenu une égalité fausse !
   Ainsi : $\boxed{S=\phi}$

2) $3x+3=3\cdot(x+1)$
   $3x+3=3x+3$
   $3x-3x=3-3$
   $0=0$
   La dernière égalité est toujours vraie !
   Quelque soit la valeur de *x*,
   l'équation est satisfaite.
   Donc : $\boxed{S=\mathbb{R}}$

Exercice 15 :

a) $7\cdot(8x-1)+13\cdot(-4x+1)=-6$

b) $4\cdot(3-4x)=2\cdot(4-4x)-3$

c) $6\cdot(2-5x)-3\cdot(5-8x)=-4$

d) $-3\cdot(5x-2)=-7-6\cdot(3+2x)$

Exercice 16 :

a) Donner un exemple d'équation dont la solution est $x=-3$

b) Donner un exemple d'équation dont la solution est $x=\frac{3}{2}$

Méthode du D.C. (dénominateur commun)

- Si l'on rencontre une équation avec des fractions il est bien plus aisé de se débarrasser le plus rapidement possible de l'écriture fractionnaire.
- Pour cela on place tous les monômes sur le ***même dénominateur***.
- En vertu de P2 on peut tout multiplier par le DC et l'équation à résoudre devient d'un coup nettement plus simple.
- La suite de la résolution est standard.

Exemple :

$$\frac{5x}{2}-3=\frac{2x-4}{3}$$

Exercice 17
Résoudre les équations suivantes: (réponses irréductibles).

1) $2x-\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$

2) $\frac{7}{13}=\frac{3}{4}-\frac{1}{26}x$

3) $5x-\frac{3}{8}=\frac{2}{7}$

4) $\frac{5}{12}+\frac{9}{20}x=-\frac{1}{30}$

5) $-\frac{4}{5}-\frac{2}{3}x=\frac{7}{15}$

6) $-\frac{5}{6}-\frac{3}{4}x=\frac{7}{12}$

Exercice 18
Résoudre les équations suivantes: (réponses irréductibles).

1) $-\frac{3}{4}x+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

2) $-5\cdot(x-2)-3\cdot(6+3x)=-\frac{2}{3}$

3) $\frac{4}{5}-8x=\frac{3}{4}$

4) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}x=-\frac{3}{20}$

Exercice 19
Le quadruple d'un nombre, augmenté de 3 égale 47. Quel est ce nombre ? *(Justifier.)*

Exercice 20
Trouver deux nombres tels que le deuxième soit égal au triple du premier et que leur somme soit égale à 76.

Exercice 21
Trouver deux nombres tels que le deuxième soit égal au quintuple du premier et que leur somme soit égale à 138.

Exercice 22
Partager 4800 fr. entre deux personnes de telle sorte que la part de la deuxième soit égale au triple de la part de la première.

Exercice 23
Partager 740 fr. entre deux personnes de telle sorte que la deuxième reçoive 300 F de moins que la première.

Exercice 24
Pour trouver le prix d'une course en taxi, on compte 1,50 Fr. par kilomètre puis on ajoute 3,50 Fr. de prise en charge.
Calculer la longueur d'un trajet qui a coûté 45,50 Fr.

Exercice 25
Pour trouver le montant de ma facture d'électricité, je compte l'abonnement à 48 Fr. par période. Il faut ajouter à cela 14 cts le KWH. Quelle a été ma consommation en KWH :
si le montant de la facture est de 250,30 Fr. pour une période ?

Exercice 26
En multipliant un nombre par 4 puis en ajoutant 12, on obtient le même résultat que si on avait multiplié ce nombre par 6. Quel est ce nombre ?

Solutions

Ex 1 : *1)* $-2a^3+3a^2$ *; 2)* $4x^2-5x+y$ *; 3)* $-a^2$ *4)* $3x^2-9x$ *; 5)* $6x^3-5x+11$ *; 6)* a^2-2a-3

Ex 2 : *1)* $-x^2$ *; 2)* b *; 3)* $30a$ *; 4)* $10x^4$ *; 5)* $9b-5c$ *; 6)* $-2a^3+4a^2-15a$

Ex 3 : *1)* $21x$ *; 2)* $-3a^3$ *; 3)* $12a^2+a$ *; 4)* $5x+15$ *; 5)* x^3+3x *; 6)* $10x^2-16x$ *; 7)* $5x-5y$
8) $3a^4-a^3+2a^2$ *; 9)* $-2a+4$ *; 10)* $7x-10$ *; 11)* $3a-b-1$ *; 12)* $6x^3+14x^2$ *; 13)* $10a-7b$

Ex 4 : *1)*$17x-27$ *; 2)* $14x^3-7x^2$ *; 3)* $-12x-13y$ *; 4)* $7a^2-a$ *; 5)* $3x^3+x^2$ *; 6)* a

Ex 5 : *1)* $17a^4-5a^3$ *; 2)* $-9x^2-y$ *; 3)* $5a^2b$ *; 4)* $-5x+1$ *; 5)* $-8ax$ *; 6)*$9x-8$

Ex 6 : *1)* $16x^4$ *; 2)* $-27a^3$ *; 3)* x^2-32x *; 4)* $3a^3+3a+3$ *; 5)* $-30x^8+40x^7-60x^5$
6) $-5a-3b-16c$ *; 7)* $2x+9y$

Ex 7 : *1)* $2a-6b+8c$ *; 2)* $-3x-10y$ *; 3)* $-4x^2+7xy+2x-2$ *; 4)* $-43a^2-42a$
6) $-4a^2+2a+8ab-b^2-3$ *; 6)* $-3x^2-42x$ *; 7)* $6a^2-a-7ab$

Ex 9 : *a) 3 ; b) -27 ; c) -6 ; d) -2 ; e) 2 ; f) -3 ;*
Ex 10 : *–2 = -2 donc oui ;*
Ex 11 : *a) 3/2 ≠ 7/2 donc non ; b) –7/2 = -7/2 donc oui*
Ex 12: *a)-21 ; b)-13 ; c)-6 ; d)-48 ; e)120 ; f)-25; g)8; h)20*
Ex 13: *a) 13/2=13/2 ; b) oui car : -3/4=-3/4*
Ex 14: *a)-11 ; b)96; c)0 ; d)-75*
Ex 15: *1) –3 ; 2) 7/8; 3) 1/6 ; 4) 31/3*
Ex 16 : *a) Par exemple :* $2x+7=1$ *; b) Par exemple :* $2x+8=11$
Ex 17 : *1) 3/5 ; 2) 11/2 ; 3) 37/280 ; 4) –1 ; 5) –19/10 ; 6) –17/9*
Ex 18 : *1) –4/27 ; 2) –11/21 ; 3) 1/160 ; 4) –22/25*
Ex 19 : *11*
Ex 20 : Les deux nombres sont 19 et 57.

Ex 21 : Les deux nombres sont 23 et 115.

Ex 22 : La part de la première est de 1200 Fr. et celle de la deuxième de 3600 Fr.

Ex 23 : La part de la première est de 520 Fr. et celle de la deuxième de 220 Fr.

Ex 24 : La longueur du trajet est de 28 km.

Ex 25 : Ma consommation est de 1445 KWH pour une période.
Ex 26 : Ce nombre est 6.