6. Equations du deuxième degré et les paraboles

§ 6.1 Equation du deuxième degré à une inconnue et ses coefficients

Une équation du deuxième degré (ED2) à une inconnue est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît au deuxième degré.

Exemples :
a) $4\,x^2 - 4x = 8 - 3x$
b) $x + 3 = x(1 - 5x)$
c) $5x - 6x^2 = x^2 - x$

Définition : Une équation du deuxième degré à une inconnue est dite **homogène** si elle est sous la forme réduite :

$$\boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$$

où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des nombres fixés appelés les coefficients.

Exemples d'équations réduites :

a) $4x^2 + 5x + 2 = 0$ $a =$ $b =$ $c =$

b) $7x + 9x^2 - 3 = 0$ $a =$ $b =$ $c =$

c) $x^2 + 2x = 0$ $a =$ $b =$ $c =$

d) $5x^2 = 0$ $a =$ $b =$ $c =$

e) $-x^2 - 4x - 9 = 0$ $a =$ $b =$ $c =$

f) $x^2 - 45 = 0$ $a =$ $b =$ $c =$

Exercice 1 : Réduire les équations ci-dessous et trouver $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.

a) $x^2 - 34x = 78$

b) $6x = 3x^2 - 8x$

c) $3x^2 + 5x - 23 = 8x^2 - 4x - 7$

d) $2x - 4(3 - 2x^2) = x^2$

e) $(2x + 3)(4x - 1) = 5x + 2$

f) $\frac{2x+5}{4} = \frac{3}{x}$

g) $4x(2 - 3x) = 0$

§ 6.2 Méthode pour résoudre une équation du deuxième degré réduite

Définition : Soit l'équation réduite : $\boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$

Le ***discriminant*** de l'équation est le résultat de l'expression suivante : $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$

Notation : On note le ***discriminant*** par Δ

Donc : $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$

Exercice 2 :

Complétez le tableau suivant :

a	*b*	*c*	Δ
2	7	4	
2	7	-4	
-2	7	-4	
-2	-7	-4	
1	2	1	
-1	2	0	
-2	0	-3	

Exercice 3 : Calculer les *discriminants* des équations ci-dessous

a) $x^2 + 3x = 8$ b) $3x - 2(3x - 5) = x^2$ c) $3x(2 - 3x) = 3x$

d) $3x^2 = 4 - 3(1 - 2x^2)$ e) $\dfrac{3x+4}{x} = \dfrac{6}{2x}$ f) $(3x - 2)(x + 3) = 4x$

g) $\dfrac{x}{2x-5} = \dfrac{3}{x+3}$ h) $4x^2 - 3 + 2x = 6x^2 - 2x + 3$

Théorème : Les solutions* d'une équation de la forme $\boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

*Remarque : En fait il y a trois cas possibles :

cas i) $\Delta > 0$, alors il y a deux solutions

cas ii) $\Delta = 0$, alors il y a qu'une solution

cas iii) $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solution

Méthode complète pour résoudre une équation du deuxième degré

1) Réduire l'équation et la mettre sous sa forme homogène
2) Calculer Δ
3) Calculer les solutions avec les formules ci-dessus (si $\Delta \geq 0$)

Exemples : a) $2x^2 + 4x = 16$

b) $3x^2 + x = -10$

Ex 4 : Résoudre les équations suivantes

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$
b) $x^2 - 7x = -12$
c) $x^2 + x = 6$
d) $2x^2 + 8 = 8x$
e) $5x^2 = 0$
f) $5x^2 = 50$

Ex 5 : Résoudre les équations suivantes

a) $x^2 = 1 + x$
b) $2x^2 + x = -50$
c) $x^2 - 2 = 0$
d) $(x + 2)(x - 4) = 0$
e) $(x + 2)(x - 4) = -9$
f) $(x + 2)(x - 4) = -10$

Ex 6 : Résoudre les équations suivantes

a) $(x + 3)(x - 3) - 6 = 0$
b) $x(x - 3) + 1 = 5(x - 3)$
c) $(x + 1)(x - 1) + x(x - 1) = x^2$
d) $x^2 + 9 = 2x - 3$
e) $x - 1 = 2(x - 4)$
f) $(x + 3)(x - 1) = 2x - 1$
g) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{9}{4x+1}$
h) $\dfrac{x^2}{3} + x = 18$
i) $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{2}$
j) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} = 6$

§ 6.3 Systèmes d'équations du deuxième degré et problèmes

Méthode conseillée : ***La substitution***

Exemple : résoudre $\begin{cases} 3x + y = 28 \\ xy = 60 \end{cases}$

Exercice 7 :
Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ xy = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = -20 \\ x + 2y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = 25 \\ 4x + y = 25 \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy = 80 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

e*) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ 5x + y = 5 \end{cases}$ f*) $\begin{cases} 2x - 5y = -23 \\ x^2 + xy = 6 \end{cases}$ g*) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 5 \\ xy = 180 \end{cases}$

Exercice 8 :

Problèmes

1) Quel est le nombre qui, multiplié par ***ses*** 5/6 donne 1080 ?

2) La somme du carré et du double d'un nombre donne 99. Quel est ce nombre ?

3) La somme de deux nombres vaut 34 et leur produit vaut 253. Quels sont ces nombres ?

4) Le rapport de deux nombres vaut 5/3 et leur produit 1215. Quels sont ces nombres ?

5) Trouver les dimensions d'un rectangle dont l'aire est de 8,64 m^2, et dont la largeur vaut les 2/3 de la longueur

6) Trouver les dimensions d'un rectangle sachant que son aire vaut 54 cm^2 , et que son périmètre vaut 30 cm.

7) Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont l'aire est de 874 cm^2 et dont la longueur surpasse la largeur de 15 cm ?

8) La différence de deux nombres vaut 76, et le plus grand vaut 5 fois le carré du plus petit. Quels sont ces nombres ?

9*) Jean possède un certain nombre de livres qu'il désire empiler de façon à obtenir des piles de 80 cm de hauteur. Il y a deux sortes de livres, les gros et les minces. Les gros ont 1 cm d'épaisseur en plus que les minces. Sachant qu'une pile de livres minces possède 4 livres de plus qu'une pile de livres épais, calculer le nombre de livres par pile ainsi que l'épaisseur de chaque sorte de livre.

§ 6.4 Notions de base sur les applications

1) Les trois notations ci-dessous sont équivalentes :

$$f : x \to 2x + 5 \qquad f(x) = 2x + 5 \qquad y = 2x + 5$$

Elles désignent l'application f

---

2) Que signifie $f(4)$?

$f(4)$ est le résultat que l'on trouve en remplaçant x par 4 dans la formule de f

Dans l'exemple ci-dessus : on trouve $f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 13$

on dit que 13 est l'***image*** de 4 par f

Exercice 9 :

Soient $f : x \to x - 5$ $g : x \to \dfrac{50}{x^2 + 10}$ et $h : x \to 0{,}5 \cdot x^2 + x + 1$

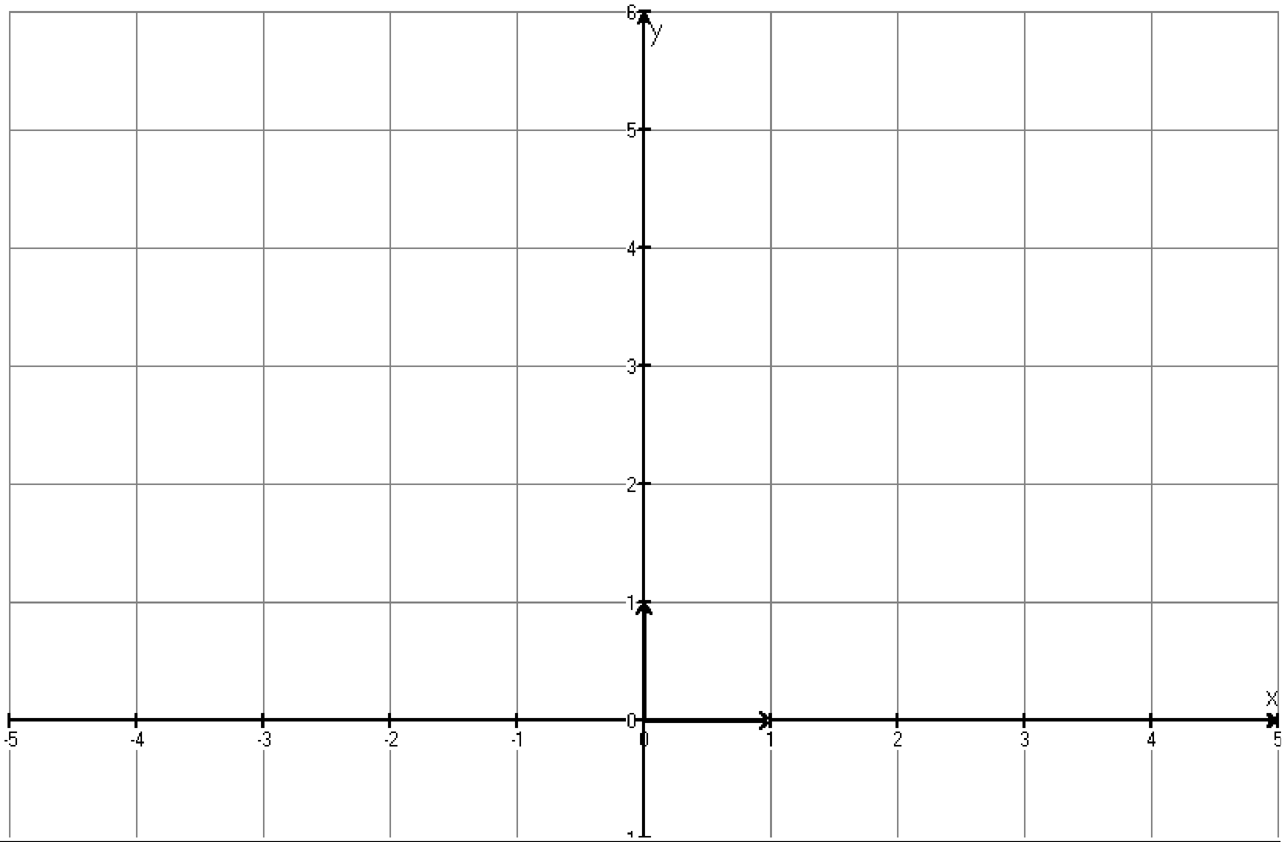
Calculer : *f(1) =* *g(1) =* *h(1) =*
f(10) = *g(10) =* *h(10) =*

3) Dessin d'une application

Pour dessiner une application, on établit un tableau des valeurs (tableau des images); puis on place les points dans un système d'axes.

Exemple : dessin de l'application $g : x \to \dfrac{50}{x^2 + 10}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = \dfrac{50}{x^2+10}$										



§ 6.5 Les applications du deuxième degré : « Les paraboles »

Définition : Une application du deuxième degré est une application de la forme :

$$f : x \to ax^2 + bx + c$$

Exercice 10 : Dessiner les applications suivantes

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = x^2 - 4$ c) $h(x) = x^2 + x + 1$

d) $i(x) = -x^2 + 2x + 1$ e) $j(x) = -2x^2 + x + 1$ f) $k(x) = -x^2 - 1$

Remarque : Ces applications sont appelées : ***PARABOLES***

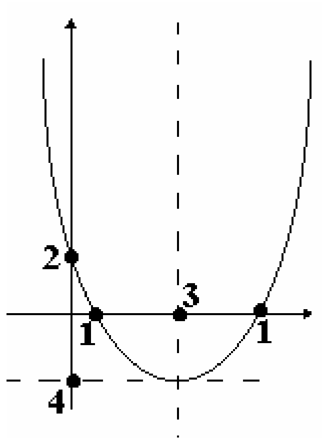
Les points particuliers d'une parabole

(1) Les **zéros**

(2) L'**ordonnée à l'origine**

(3) La valeur en ***x*** de l'**axe de symétrie**

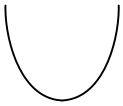
(4) La valeur de son **extremum**

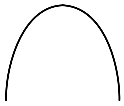


Exercice 11 : Déterminer les points particuliers des paraboles de l'exercice 10.

§ 6.6 Recherche algébrique des points particuliers d'une parabole

Définitions :

Parabole **_Convexe_** 

Parabole **_Concave_** 

Théorèmes : Soit l'application $f : x \to ax^2 + bx + c$

1) Son ordonnée à l'origine vaut : c
2) Son axe de symétrie vaut : $x_s = \frac{-b}{2a}$
3) Son extremum vaut : $y_s = f(x_s) = -\frac{\Delta}{4a}$
4) Pour trouver les Zéros il suffit de résoudre : $ax^2 + bx + c = 0$
5) Si $a > 0$ alors la parabole est **convexe**
   Si $a < 0$ alors la parabole est **concave**

Marche à suivre pour l'étude complète d'une parabole

1) Calculer les points particuliers
2) Placer ces points sur un graphique
3) Calculer d'autres points si nécessaire
4) Dessiner la parabole

Exemple : Faire une étude complète de $h : x \mapsto -0,2x^2 + 0,5x + 4$

<u>Ex 12</u> : Dessinez les quatre paraboles ci-dessous :

	Ordonnée à l'O.	x_s	**Extremum**	**Zéros**
a)	-1,3	-6	-4,9	1 et -13
b)	7	3	16	-1 et 7
c)	-6	-0,5	-6,125	3 et -4
d)	6,25	0	6,25	-5 et 5

<u>Ex 13</u> : Etudiez les paraboles ci-dessous :

a) $f : x \rightarrow -0{,}125x^2 - 0{,}125x + 1{,}5$ b) $g : x \rightarrow 0{,}5x^2 + 2{,}5x - 7$

c) $h : x \rightarrow -0{,}2x^2 - 1{,}8x$ d) $i : x \rightarrow 0{,}2x^2 - 1{,}2x - 14{,}4$

Solutions

<u>Ex 1</u> :

a)	*a = 1*	*b = -34*	*c = -78*	*b)*	*a = 3*	*b = -14*	*c = 0*
c)	*a = -5*	*b = 9*	*c = -16*	*d)*	*a = 7*	*b = 2*	*c = -12*
e)	*a = 8*	*b = 5*	*c = -5*	*f)*	*a = 2*	*b = 5*	*c = -12*
g)	*a = -12*	*b = 8*	*c = 0*				

<u>Ex 2</u> : 17 ; 81 ; 17 ; 17 ; 0 ; 4 ; -24
<u>Ex 3</u> : a) 41 ; b) 49 ; c) 9 ; d) -12 ; e) 4 ; f) 81 ; g) -51 ; h)-32

Ex 4 :

	x_1	x_2
a)	*1*	*-6*
b)	*4*	*3*
c)	*2*	*-3*
d)	*2*	*2*
e)	*0*	*0*
f)	*3,162*	*-3,162*

Ex 5 :

	x_1	x_2
a)	*1,618*	*-0,618*
b)	*Pas de sol.*	
c)	*1,414*	*-1,414*
d)	*4*	*-2*
e)	*1*	*1*
f)	*Pas de sol.*	

Ex 6:

	x_1	x_2
a)	*3,873*	*-3,873*
b)	*4*	*4*
c)	*1,618*	*-0,618*
d)	*Pas de sol.*	
e)	*7*	
f)	*1,414*	*-1,414*
g)	*2*	*-3.25*
h)	*6*	*-9*
i)	*1*	*-0.5*
j)	*4*	*-6*

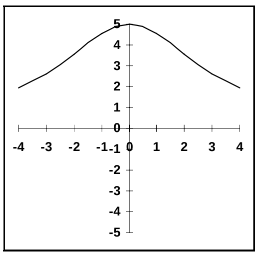
<u>Ex 7</u> : a) < 2 ; 8 > et < 4 ; 4>
b) < -2 ; 10 > et < 20 ; -1>
c) < 5 ; 5 > et < 1,25 ; 20 >
d) < 8 ; 10 > et < -5 ; -16>
e) < 2 ; -5 > et < -0,077 ; 5,385>
f) < 1 ; 5 > et < -4,285 ; 2,886 >
g) < 30 ; 6 > et < -30 ; -6 >

<u>Ex 8</u> : 1) 36 ou -36   2) 9 ou -11   3) 11 et 23 ou 23 et 11
4) 45 et 27 ou -45 et -27   5) 3,6 par 2,4
6) 6 et 9 ou 9 et 6   7) 38 par 23   8) 80 et 4 ou 72,2 et -3,8
9) 20 livres de 4 cm et 16 livres de 5 cm

<u>Ex 9</u> :

f(1) = -4	*g(1) = 4,55*	*h(1) = 2,5*
f(10) = 5	*g(10) = 0,45*	*h(10) = 61*

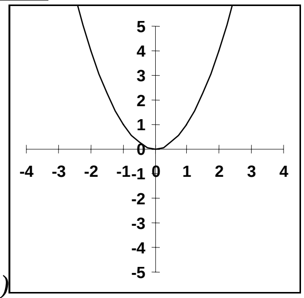
<u>Exemple</u> : (page 6)



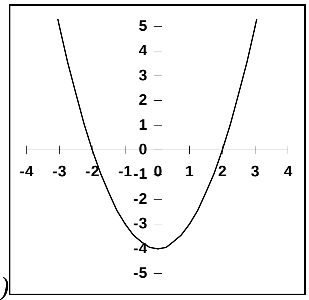
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	1.92	2.63	3.57	4.55	5	4.55	3.57	2.63	1.92	1.43

Ex 10 :

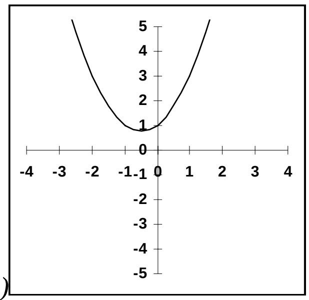
a)



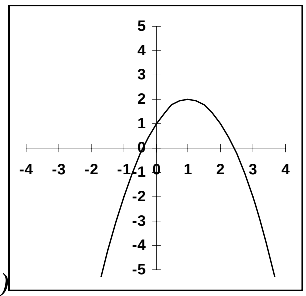
b)



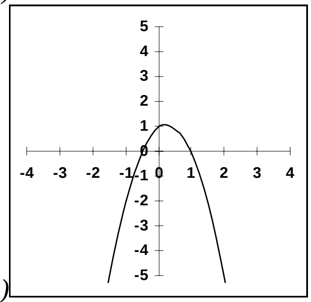
c)



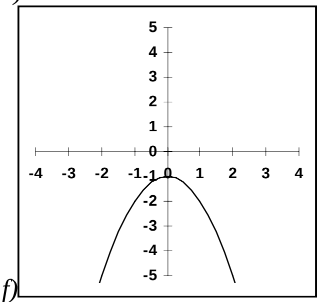
d)



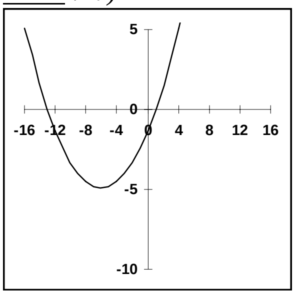
e)



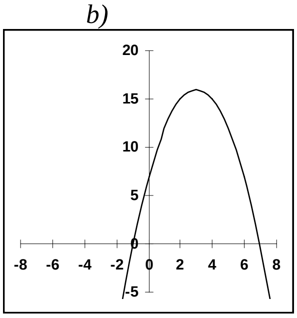
f)



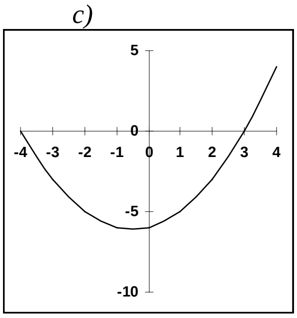
Ex 12 : a)



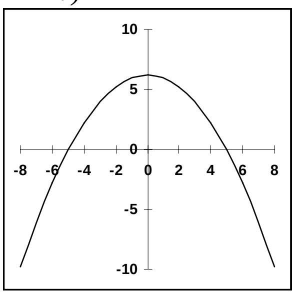
b)



c)

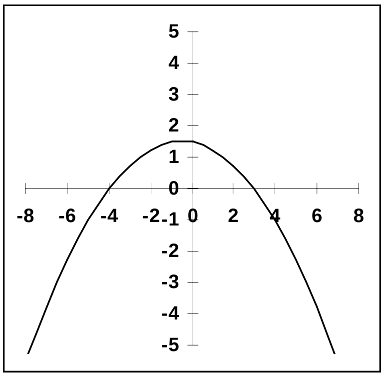


d)



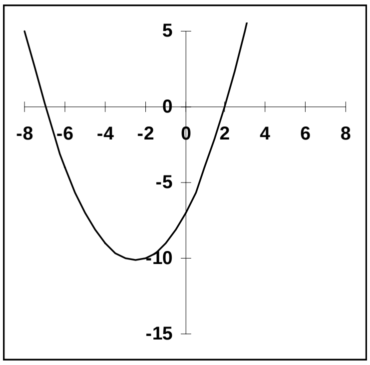
Ex13 : a)

OàO =	1.5
Xs =	-0.5
Extr.	1.5313
X_1	-4
X_2	3



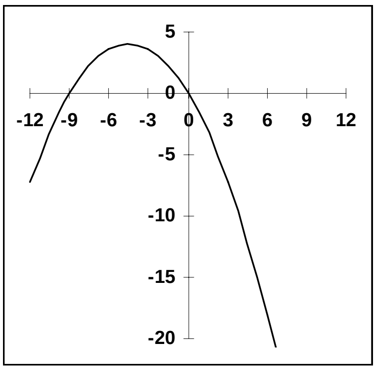
b)

OàO =	-7
Xs =	-2.5
Extr.	-10.125
X_1	2
X_2	-7



c)

OàO =	0
Xs =	-4.5
Extr.	4.05
X_1	-9
X_2	0



d)

OàO =	-14.4
Xs =	3
Extr.	-16.2
X_1	12
X_2	-6