

Chapitre 6 Les factorielles

6.1 Les factorielles

Les suites des nombres consécutifs en produits sont : *les factorielles*.

Exemple :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$$

Définition :

Soit n un nombre entier positif. On définit « n factoriel » par :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad \text{si} \quad n > 0$$

$$0! = 1$$

Exercice 1 :

Compléter le tableau suivant :

0!	=
1!	=
2!	=
3!	=
4!	=
5!	=
6!	= 720
7!	= 5'040
8!	= 40'320
9!	= 362'880
10!	=
11!	= 39'916'800
12!	= 479'001'600
13!	= 6'227'020'800
14!	= 87'178'291'200
15!	= 1'307'674'368'000
16!	= 20'922'789'888'000
17!	= 355'687'428'096'000
18!	= 6'402'373'705'728'000
19!	= 121'645'100'408'832'000
20!	= 2'432'902'008'176'640'000
30!	=
50!	=

Exercice 2 :

Calculer :

a) $\frac{15!}{12!} =$

c) $\frac{600!}{598!} =$

b) $\frac{20!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} =$

d) $\frac{300!}{3! \cdot 297!} =$

Exercice 3 :

Calculer

a) $(4 \cdot 3)! =$

b) $4! \cdot 3! =$

c) $4 \cdot 3! =$

d) $(4+3)! =$

e) $4! + 3! =$

f) $15! - 15! =$

Exercice 4 :

Simplifier les expressions ci-dessous (n est un entier positif) :

a) $\frac{n!}{(n-1)!} =$

b) $\frac{n!}{(n-2)!} =$

c) $\frac{(n+1)!}{n!} =$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} =$

6.2 Deux formules importantes

Définition :

Soient p et n deux nombres entiers positifs tels que $p \leq n$, on définit :

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} = (n-p+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad (\text{Nombre d'arrangements.})$$

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{(n-p+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} \quad (\text{Nombre de combinaisons.})$$

Exercice 5 :

Calculer :

a) $A_3^7 =$

b) $A_5^9 =$

c) $A_2^{100} =$

d) $A_1^{15} =$

e) $A_0^{18} =$

f) $A_{30}^{30} =$

g) $A_3^{15} =$

h) $A_{12}^{15} =$

i) $A_{20}^{30} =$

j) $A_{15}^{50} =$

k) $A_1^{1000} =$

l) $A_{500}^{500} =$

Exercice 6 :

Calculer :

a) $A_3^5 + 2 =$

b) $A_{3+2}^8 =$

c) $A_3^5 \cdot A_8^{10} =$

d) $A_2^7 + A_6^7 =$

Exercice 7 :

Calculer :

a) $C_3^7 =$

b) $C_2^5 =$

c) $C_{98}^{100} =$

d) $C_1^{18} =$

e) $C_0^{15} =$

f) $C_{20}^{20} =$

g) $C_3^{10} =$

h) $C_7^{10} =$

i) $C_{20}^{50} =$

j) $C_{600}^{600} =$

k) $C_{300}^{300} =$

Exercice 8 :

Calculer :

a) $C_2^8 \cdot C_3^5 =$

b) $C_{2+3}^8 =$

c) $C_2^8 + C_1^5 =$

d) $C_3^5 + 5 =$

Exercice 9 :

Comparer et généraliser :

a) C_4^{10} et C_6^{10}

b) C_8^{15} et C_7^{15}

c) C_2^7 et C_5^7

d) C_1^{19} et C_{18}^{19}

SOLUTIONS

Ex 1 :

$0! = 1$	$3! = 6$	$10! = 3'628'800$
$1! = 1$	$4! = 24$	$30! = 2,653 \cdot 10^{32}$
$2! = 2$	$5! = 120$	$50! = 3,041 \cdot 10^{64}$

Ex 2 :

- a) 2730 b) $1,69 \cdot 10^{15}$ c) 359'400 d) 4'455'100

Ex 3 :

- a) $4,79 \cdot 10^8$ b) 144 c) 24 d) 5040 e) 30 f) 0

Ex 4 :

- a) n b) $n^2 - n$ c) $n + 1$ d) $n^2 + n$

Ex 5 :

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|----------|--------------------------|
| a) 210 | b) 15'120 | c) 9'900 | d) 15 |
| e) 1 | f) $2,65 \cdot 10^{32}$ | g) 2'730 | h) $2,179 \cdot 10^{11}$ |
| i) $7,31 \cdot 10^{25}$ | j) $2,94 \cdot 10^{24}$ | k) 1'000 | l) 500! |

Ex 6 :

- a) 62 b) 6720 c) $1,089 \cdot 10^8$ d) 5082

Ex 7 :

- | | | | |
|-------------------------|-------|----------|--------|
| a) 35 | b) 10 | c) 4'950 | d) 18 |
| e) 1 | f) 1 | g) 120 | h) 120 |
| i) $4,71 \cdot 10^{13}$ | j) 1 | k) 1 | |

Ex 8 :

- a) 280 b) 56 c) 33 d) 15

Ex 9 :

- a) 210 et 210 b) 6435 et 6435 c) 21 et 21 d) 19 et 19 Généralisation : $C_p^n = C_{n-p}^n$