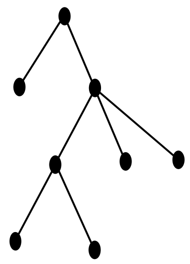
Chapitre 7 Analyse combinatoire

7.1 Botanique mathématique : les arbres



Pour représenter des situations où plusieurs choix sont possibles, on a recours parfois à la représentation en arbre.

L'arbre ci-contre possède 5 chemins.

Exemple d'utilisation :
Combien de mots de quatre lettres peut-on réaliser avec les lettres A B C D si les répétitions ne sont pas permises ?

7.2 Théorème fondamental de l'analyse combinatoire

Théorème :
Si une expérience E_1 peut donner n_1 résultats différents, et si une expérience E_2 peut donner n_2 résultats différents, alors la suite des expériences E_1 & E_2 peut donner $n_1 \cdot n_2$ résultats différents.

Exemple 1 :
Jean doit s'habiller pour sortir. Sachant qu'il doit mettre un pantalon et une veste et qu'il possède 4 pantalons différents et trois vestes différentes, de combien de manières différentes peut-il s'habiller.

Exemple 2 :
Un code est formé d'une voyelle suivie d'une consonne. Combien y a-t-il de codes différents ?

Exemple 3 :

a) Une classe est composée de 8 filles et 6 garçons. Combien a-t-on de possibilités pour choisir une fille **et** un garçon ? (donc 2 élèves en tout)

b) Une classe est composée de 8 filles et 6 garçons. Combien a-t-on de possibilités pour choisir une fille **ou** un garçon ? (donc 1 élève en tout)

Règle :
- Le **et** se traduit très souvent par une multiplication.
- Le **ou** se traduit très souvent par une addition.

7.3 Les permutations

Définition :
Permuter des objets c'est les réarranger dans un autre ordre.

Nous allons distinguer 3 sortes de permutations :

1) Les permutations "rectilignes" de n objets tous différents.
Exemple : trouver le nombre d'anagrammes du mot C H I E N

2) Les permutations "rectilignes" de n objets dont certains sont identiques.
Exemple : trouver le nombre d'anagrammes du mot A N A N A S

3) Les permutations "circulaires" de n objets tous différents.
Exemple : Pierre, Jean, Anne et Corinne vont au restaurant. On leur propose une table ronde. Trouver le nombre de dispositions différentes possibles.

Règles :

Pour le cas 1) $n!$

Pour le cas 2) $$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

Pour le cas 3) $(n-1)!$

Notation : On note par P_n, le nombre de permutations de n objets différents.
Donc $P_n = n!$

Ce qui nous donne :

Pour l'exemple 1) : $P_5 = 5! = 120$ anagrammes possibles

Pour l'exemple 2) : $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ anagrammes possibles

Pour l'exemple 3) : $(4-1)! = 3! = 6$ dispositions différentes

Exercices 1 :

a) Ecrire tous les anagrammes du mot B A C

b) Ecrire tous les anagrammes du mot T O T O T

c) Donner toutes les dispositions différentes de l'exemple 3) ci-dessus.

7.4 Arrangements de n objets différents pris p à p

Remarque :
Un arrangement sous-entend des dispositions différentes des éléments mis en ligne.
Il n'y a donc **pas de répétition** et **l'ordre des éléments à tout son importance** !

Exemple :
On dispose de 10 lettres **différentes** (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J). On veut en choisir 3 pour former un code. Combien y a-t-il de codes possibles ?

On a par exemple : « ABC , ACB , CBA, DEF, … »

1) Première manière de résoudre le problème *(théorème fondamental)*

2) Deuxième manière

Définition :
Un choix ordonné de **p** objets choisis parmi **n** objets différents est un **arrangement de n objets pris p à p.**

Notation : $A_p^n =$ « nombre d'arrangements de ***n*** objets différents pris ***p*** à ***p***. »

Règle : $\boxed{A_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

Donc pour notre exemple, il s'agit de trouver A_3^{10} = arrangements de 10 objets différents pris 3 à 3

Donc :

$$A_3^{10} =$$

Exercices 2 :

a) Combien de mots de 4 lettres différentes peut-on réaliser avec l'alphabet français ?

b) Combien de ces mots de 4 lettres différentes ne contiennent que des voyelles ?

c) Combien y a-t-il d'arrivées différentes pour un tiercé avec 12 partants ?

7.5 Combinaisons de n objets différents pris p à p

Remarque :
Une combinaison est un « tirage » de ***p*** éléments différents choisis parmi ***n***.
Il n'y a donc **pas de répétition** mais **l'ordre des éléments n'a pas importance** !

Exemple :
Soient 10 jouets. On veut en choisir 3 pour les donner au petit Pierre.
De combien de façons peut-on effectuer ce choix ?

Définition :
Un choix (pour lequel l'ordre n'a pas d'importance) de ***p*** objets, choisis parmi ***n*** objets différents, est une **combinaison de *n* objets pris *p* à *p***

Notation : $C_p^n =$ « nombre de combinaisons de ***n*** objets différents pris ***p*** à ***p***.»

Règle : $\boxed{C_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}}$

Donc pour notre exemple, il s'agit de trouver :

$C_3^{10} =$ « nombre de combinaisons de ***10*** objets différents pris ***3*** à ***3*** »

Donc :

$$C_3^{10} =$$

Exercice 3 :
Combien de comités différents de 5 personnes peut-on former dans une association de 20 personnes ?

Application :
Combien y a-t-il de grilles différentes pour la loterie suisse à numéros ?

Solutions :
Ex 1 :
a) ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
b) OOTTT, OTOTT, OTTOT, OTTTO, TOOTT, TOTOT, TOTTO, TTOOT, TTOTO, TTTOO
c) ACJP, ACPJ, AJCP, AJPC, APCJ, APJC

Ex 2 :

a) $A_4^{26} = \dfrac{26!}{(26-4)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358'800$

b) $A_4^{6} = \dfrac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

c) $A_3^{12} = \dfrac{12!}{(12-3)!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1'320$

Ex 3 :

$C_5^{20} = \dfrac{20!}{(20-5)! \cdot 5!} = 15'504$

7.6 Exercices

Exercice 1 :
Représenter les situations ci-dessous par des arbres et compter le nombre de chemins différents.

a) Je lance une pièce de monnaie et un dé. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

b) Pierre et Marc se lancent un défi au tennis. La règle est la suivante : "Le premier à gagner deux parties de suite ou trois parties en tout est déclaré vainqueur". Combien y a-t-il de déroulements possibles pour ce défi ?

c) Représenter, par un arbre, tous les chemins reliant A à B si les seuls mouvements possibles sont :
- une case vers la droite (vers l'EST)
- une case vers le bas (vers le SUD)

A	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	B

d) Idem, mais les cases noires sont interdites.

A	1	2	3	4
5	6	■	7	8
9	10	■	■	11
12	13	14	15	16
17	■	18	19	**B**

Théorème fondamental

Exercice 2 :
a) Combien de "mots" de 3 lettres existe-t-il ?
b) Combien de ces "mots" ont des lettres (toutes) différentes ?
c) Combien commencent par A ?
d) Combien commencent par A et ont des lettres différentes ?
e) Combien commencent par une consonne ?
f) Combien se terminent par une voyelle ?
g) Combien ne contiennent que des consonnes ?
h) Combien ne contiennent que des voyelles et toutes différents ?
i*) Combien ont au moins une lettre qui se répète ?
j) Combien ont les trois lettres identiques ?

Exercice 3 :
Un code est composé de 2 lettres suivies de 3 chiffres.
Exemples de code : **Z E 2 1 7** **A B 6 6 7** **Z Z 3 3 3**
a) Combien de codes différents existe-t-il ?
b) Combien se terminent par 5 ?
c) Combien commencent par une voyelle ?
d) Combien ne se terminent pas par 8 ?
e) Combien se terminent par 3 et commencent par Z ?
f) Combien ne contiennent que des chiffres impairs ?
g) Combien ne contiennent que des voyelles ?
h) Combien ne contiennent que des symboles différents ?

Exercice 4 :
On dispose des chiffres **3 4 5 6 7** pour former des nombres de 3 chiffres.
Exemples de nombres : **765 445 333**
a) Combien peut-on former de nombres en tout si les répétitions sont permises ?
b) Combien peut-on former de nombres en tout si les répétitions ne sont pas permises ?
c) Combien y a-t-il de nombres pairs si les répétitions sont permises ?
d) Combien y a-t-il de nombres pairs si les répétitions ne sont pas permises ?
e) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions sont permises ?
f) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 5 :
On lance cinq pièces de monnaie.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
On lance deux pièces de monnaie et trois dés.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
On choisit une carte au hasard d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
On choisit, sans remise, deux cartes d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
On choisit, avec remise, deux cartes d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Permutations

<u>Exercice 6</u> :
Soient Jean, Pierre, Hugues, Anne, Chantal et Sophie 6 personnes qui vont s'asseoir sur un banc (banc rectiligne à six places)
a) Combien y a-t-il de possibilités ?
b) Combien y a-t-il de possibilités si Jean veut être à côté de Sophie ?
c) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons sont à gauche et les filles à droite ?
d) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons restent groupés
e) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons occupent les places paires ?
f) Combien y a-t-il de possibilités si Jean est placé tout à gauche du banc ?
g) Combien y a-t-il de possibilités si Jean veut être près de Sophie et à sa droite ?
h) Combien y a-t-il de possibilités si Jean ne veut pas être à côté de Chantal ?
i) Combien y a-t-il de possibilités si les personnes sont placées dans l'ordre alphabétique ?
j) Combien y a-t-il de possibilités si Pierre veut être entre Anne et Chantal ?
k) Combien y a-t-il de possibilités si Pierre ne veut pas être en bout de banc ?
l) Combien y a-t-il de possibilités si Jean, Pierre et Hugues restent ensemble et dans cet ordre là ?

<u>Exercice 7</u> :
a) Combien d'anagrammes du mot DIVERTIR peut-on réaliser ?
b) Combien commencent par D ?
c) Combien commencent par R ?
d) Combien commencent par T et finissent par R
e) Combien ne commencent pas par I ?
f) Combien commencent par V ou par I ?
g) Combien ont les voyelles au début ?
h) Combien ont les consonnes au début ?

<u>Exercice 8</u> :
a) Combien d'anagrammes du mot ANAGRAMMES existe-t-il ?
b) Combien commencent par A ?
c) Combien finissent par N ?
d) Combien commencent par M ?
e) Combien commencent par AME ?
f) Combien commencent par ANA ?
g) Combien commencent par A et finissent par S ?
h) Combien ont les voyelles au début ?
i) Combien ne commencent pas par G ?
j) Combien finissent par M ou par S ?
k) Combien ont les trois A côte à côte (groupés) ?
l) Combien ont les lettres classées dans l'ordre alphabétique ?
m*) Combien commencent par A ou finissent par S ?
n) Combien commencent par RARE ?

Choix

Exercice 9 :
Jean, Pierre, Anne et Luc font partie d'une classe de 14 élèves composée de 8 filles et 6 garçons. On décide de créer un comité formé de 4 élèves

a) Combien y a-t-il de comités possibles ?
b) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut un comité composé uniquement de filles ?
c) Combien y a-t-il de comités possibles si Jean ne veut pas faire partie du comité ?
d) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut un comité composé de 2 filles et 2 garçons ?
e) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut que Pierre et Jean se retrouvent ensemble dans le comité ?
f) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on ne veut pas que Anne et Luc se retrouvent ensemble dans le comité ?
g) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut que Pierre, Jean et Anne soient dans le comité ?

Exercice 10 :
D'un jeu de 36 cartes, Pierre tire 5 cartes au hasard.
Jeu : (6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) ´ 4 couleurs (cœur, carreau, trèfle et pique)
a) Combien y a-t-il de donnes possibles ?
b) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant exactement un As ?
c) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins un As ?
d) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins 3 As ?
e) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant l'As de pique ?
f) Combien y a-t-il de donnes possibles ne contenant pas l'As de carreau ?
g) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant 3 piques et 2 coeurs ?
h) Combien y a-t-il de donnes possibles ne contant pas de trèfles ?
i) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins un coeur ?
j) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant exactement un coeur ?

Exercice 11 *:
Mario, le marchand de glaces, dispose de 5 parfums différents à savoir :

Vanille, Fraise, Citron, Banane et Myrtilles

Il propose des coupes formées de trois boules. Combien de coupent différentes peut-il créer ?

Remarque :
On ne tient pas compte de la disposition des boules dans la coupe donc

- la coupe(V F M) est égale à la coupe(M F V)
- la coupe(V F F) est égale à la coupe(F V F)
- coupe(V F F) n'est pas égale à la coupe(V F V)

Solutions :

Ex 1 : a)12 ; b)10 ; c) 20 ; d)14
Ex 2 : a) 17’576 ; b) 15’600 ; c) 676 ; d) 600 ; e) 13’520 ; f) 4056 ; g) 8000 ; h) 120 ; i) 1976 ; j) 26
Ex 3 : a) 676'000 ; b) 67'600 ; c) 156'000 ; d) 608'400 ; e) 2600 ; f) 84'500 ; g) 36'000 ; h) 468'000 ;
Ex 4 : a) 125 ; b) 60 ; c) 50 ; d) 24 ; e) 25 ; f) 12 ;
Ex 5 : a) 32 ; b) 864 ; c) 36 ; d) 1260 ; e) 1296 ;
Ex 6 : a) 720 ; b) 240 ; c) 36 ; d) 144 ; e) 36 ; f) 120 ; g) 120 ; h) 480 ; i) 1 ; j) 48 ; k) 480 ; l) 24 ;
Ex 7 : a) 10'080 ; b) 1260 ; c) 2520 ; d) 360 ; e) 7560 ; f) 3780 ; g) 180 ; h) 180 ;
Ex 8 : a) 302’400 ; b) 90’720 ; c) 30’240 ; d) 60’480 ; e) 2520 ; f) 2520 ; g) 10’080 ;
h) 1440 ; i) 272’160 ; j) 90’720 ; k) 2520 ; l) 1 ; m) 110’880 ; n) 0 ;
Ex 9 : a) 1001 ; b) 70 ; c) 715 ; d) 420 ; e) 66 ; f) 935 ; g) 11 ;
Ex 10 : a) 376'992 ; b) 143'840 ; c) 175'616 ; d) 2016 ; e) 52'360 ; f) 324'632 ; g) 3024
h) 80'730 ; i) 296'262 ; j) 157'950 ;
*Ex 11 * : 35*