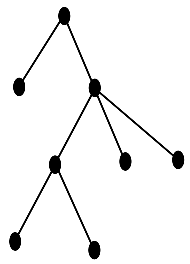
Chapitre 7 Analyse combinatoire

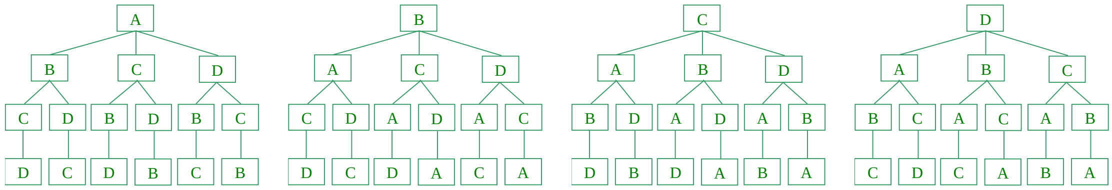
7.1 Botanique mathématique : les arbres



Pour représenter des situations où plusieurs choix sont possibles, on a recours parfois à la représentation en arbre.

L'arbre ci-contre possède 5 chemins.

Exemple d'utilisation :
Combien de mots de quatre lettres peut-on réaliser avec les lettres A B C D si les répétitions ne sont pas permises ?



Donc $4 \cdot 6 = 24$

7.2 Théorème fondamental de l'analyse combinatoire

Théorème :
Si une expérience ***E₁*** peut donner ***n₁*** résultats différents, et si une expérience ***E₂*** peut donner ***n₂*** résultats différents, alors la suite des expériences ***E₁ & E₂*** peut donner $n_1 \cdot n_2$ résultats différents.

Exemple 1 :
Jean doit s'habiller pour sortir. Sachant qu'il doit mettre un pantalon et une veste et qu'il possède 4 pantalons différents et trois vestes différentes, de combien de manières différentes peut-il s'habiller.

$4 \cdot 3 = 12$

Exemple 2 :
Un code est formé d'une voyelle suivie d'une consonne. Combien y a-t-il de codes différents ?

$6 \cdot 20 = 120$

Exemple 3 :

a) Une classe est composée de 8 filles et 6 garçons. Combien a-t-on de possibilités pour choisir une fille **et** un garçon ? (donc 2 élèves en tout)

$8 \cdot 6 = 48$

b) Une classe est composée de 8 filles et 6 garçons. Combien a-t-on de possibilités pour choisir une fille **ou** un garçon ? (donc 1 élève en tout)

$8 + 6 = 14$

Règle :

- Le **et** se traduit très souvent par une multiplication.
- Le **ou** se traduit très souvent par une addition.

7.3 Les permutations

Définition :
Permuter des objets c'est les réarranger dans un autre ordre.

Nous allons distinguer 3 sortes de permutations :

1) Les permutations "rectilignes" de n objets tous différents.
Exemple : trouver le nombre d'anagrammes du mot C H I E N

2) Les permutations "rectilignes" de n objets dont certains sont identiques.
Exemple : trouver le nombre d'anagrammes du mot A N A N A S

3) Les permutations "circulaires" de n objets tous différents.
Exemple : Pierre, Jean, Anne et Corinne vont au restaurant. On leur propose une table ronde. Trouver le nombre de dispositions différentes possibles.

Règles :

Pour le cas 1) $n!$

Pour le cas 2) $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

Pour le cas 3) $(n-1)!$

Notation : On note par P_n, le nombre de permutations de n objets différents.
Donc $P_n = n!$

<u>Ce qui nous donne</u> :

Pour l'exemple 1) : $P_5 = 5! = 120$ anagrammes possibles

Pour l'exemple 2) : $\dfrac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ anagrammes possibles

Pour l'exemple 3) : $(4-1)! = 3! = 6$ dispositions différentes

<u>Exercices 1</u> :

a) Ecrire tous les anagrammes du mot B A C

b) Ecrire tous les anagrammes du mot T O T O T

c) Donner toutes les dispositions différentes de l'exemple 3) ci-dessus.

<u>7.4 Arrangements de n objets différents pris p à p</u>

<u>Remarque</u> :
Un arrangement sous-entend des dispositions différentes des éléments mis en ligne.
Il n'y a donc **pas de répétition** et **l'ordre des éléments à tout son importance** !

<u>Exemple</u> :
On dispose de 10 lettres **différentes** (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J). On veut en choisir 3 pour former un code. Combien y a-t-il de codes possibles ?

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

On a par exemple : « ABC , ACB , CBA, DEF, … »

1) <u>Première manière de résoudre le problème *(théorème fondamental)*</u>

$$\boxed{10} \cdot \boxed{9} \cdot \boxed{8} = 720$$

2) Deuxième manière

Définition :
Un choix ordonné de **p** objets choisis parmi **n** objets différents est un **arrangement de n objets pris p à p.**

Notation : A_p^n = « nombre d'arrangements de ***n*** objets différents pris ***p*** à ***p***. »

Règle : $\boxed{A_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

Donc pour notre exemple, il s'agit de trouver A_3^{10} = arrangements de 10 objets différents pris 3 à 3
Donc :

$$A_3^{10} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Exercices 2 :

a) Combien de mots de 4 lettres différentes peut-on réaliser avec l'alphabet français ?

b) Combien de ces mots de 4 lettres différentes ne contiennent que des voyelles ?

c) Combien y a-t-il d'arrivées différentes pour un tiercé avec 12 partants ?

7.5 Combinaisons de n objets différents pris p à p

Remarque :
Une combinaison est un « tirage » de ***p*** éléments différents choisis parmi ***n***.
Il n'y a donc **pas de répétition** mais **l'ordre des éléments n'a pas importance** !

Exemple :
Soient 10 jouets. On veut en choisir 3 pour les donner au petit Pierre.
De combien de façons peut-on effectuer ce choix ?

Définition :
Un choix (pour lequel l'ordre n'a pas d'importance) de ***p*** objets, choisis parmi ***n*** objets différents, est une **combinaison de *n* objets pris *p* à *p***

Notation : C_p^n = « nombre de combinaisons de ***n*** objets différents pris ***p*** à ***p***.»

Règle : $\boxed{C_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}}$

Donc pour notre exemple, il s'agit de trouver :
C_3^{10} = « nombre de combinaisons de ***10*** objets différents pris ***3*** à ***3*** »
Donc :

$$C_3^{10} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

Exercice 3 :
Combien de comités différents de 5 personnes peut-on former dans une association de 20 personnes ?

Application :
Combien y a-t-il de grilles différentes pour la loterie suisse à numéros ?

Solutions :

Ex 1 :
a) ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
b) OOTTT, OTOTT, OTTOT, OTTTO, TOOTT, TOTOT, TOTTO, TTOOT, TTOTO, TTTOO
c) ACJP, ACPJ, AJCP, AJPC, APCJ, APJC

Ex 2 :

a) $A_4^{26} = \frac{26!}{(26-4)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358'800$

b) $A_4^{6} = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

c) $A_3^{12} = \frac{12!}{(12-3)!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1'320$

Ex 3 :

$C_5^{20} = \frac{20!}{(20-5)! \cdot 5!} = 15'504$

7.6 Exercices

Exercice 1 :
Représenter les situations ci-dessous par des arbres et compter le nombre de chemins différents.

a) Je lance une pièce de monnaie et un dé. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

b) Pierre et Marc se lancent un défi au tennis. La règle est la suivante : "Le premier à gagner deux parties de suite ou trois parties en tout est déclaré vainqueur". Combien y a-t-il de déroulements possibles pour ce défi ?

c) Représenter, par un arbre, tous les chemins reliant A à B si les seuls mouvements possibles sont :
- une case vers la droite (vers l'EST)
- une case vers le bas (vers le SUD)

A	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	B

d) Idem, mais les cases noires sont interdites.

A	1	2	3	4
5	6	■	7	8
9	10	■	■	11
12	13	14	15	16
17	■	18	19	**B**

Théorème fondamental

Exercice 2 :
a) Combien de "mots" de 3 lettres existe-t-il ?
b) Combien de ces "mots" ont des lettres (toutes) différentes ?
c) Combien commencent par A ?
d) Combien commencent par A et ont des lettres différentes ?
e) Combien commencent par une consonne ?
f) Combien se terminent par une voyelle ?
g) Combien ne contiennent que des consonnes ?
h) Combien ne contiennent que des voyelles et toutes différents ?
i*) Combien ont au moins une lettre qui se répète ?
j) Combien ont les trois lettres identiques ?

Exercice 3 :
Un code est composé de 2 lettres suivies de 3 chiffres.
Exemples de code : **Z E 2 1 7** **A B 6 6 7** **Z Z 3 3 3**
a) Combien de codes différents existe-t-il ?
b) Combien se terminent par 5 ?
c) Combien commencent par une voyelle ?
d) Combien ne se terminent pas par 8 ?
e) Combien se terminent par 3 et commencent par Z ?
f) Combien ne contiennent que des chiffres impairs ?
g) Combien ne contiennent que des voyelles ?
h) Combien ne contiennent que des symboles différents ?

Exercice 4 :
On dispose des chiffres **3 4 5 6 7** pour former des nombres de 3 chiffres.
Exemples de nombres : **765 445 333**
a) Combien peut-on former de nombres en tout si les répétitions sont permises ?
b) Combien peut-on former de nombres en tout si les répétitions ne sont pas permises ?
c) Combien y a-t-il de nombres pairs si les répétitions sont permises ?
d) Combien y a-t-il de nombres pairs si les répétitions ne sont pas permises ?
e) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions sont permises ?
f) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 5 :
On lance cinq pièces de monnaie.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
On lance deux pièces de monnaie et trois dés.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
On choisit une carte au hasard d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
On choisit, sans remise, deux cartes d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
On choisit, avec remise, deux cartes d'un jeu de 36 cartes.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Permutations

<u>Exercice 6</u> :

Soient Jean, Pierre, Hugues, Anne, Chantal et Sophie 6 personnes qui vont s'asseoir sur un banc (banc rectiligne à six places)

a) Combien y a-t-il de possibilités ?
b) Combien y a-t-il de possibilités si Jean veut être à côté de Sophie ?
c) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons sont à gauche et les filles à droite ?
d) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons restent groupés
e) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons occupent les places paires ?
f) Combien y a-t-il de possibilités si Jean est placé tout à gauche du banc ?
g) Combien y a-t-il de possibilités si Jean veut être près de Sophie et à sa droite ?
h) Combien y a-t-il de possibilités si Jean ne veut pas être à côté de Chantal ?
i) Combien y a-t-il de possibilités si les personnes sont placées dans l'ordre alphabétique ?
j) Combien y a-t-il de possibilités si Pierre veut être entre Anne et Chantal ?
k) Combien y a-t-il de possibilités si Pierre ne veut pas être en bout de banc ?
l) Combien y a-t-il de possibilités si Jean, Pierre et Hugues restent ensemble et dans cet ordre là ?

<u>Exercice 7</u> :

a) Combien d'anagrammes du mot DIVERTIR peut-on réaliser ?
b) Combien commencent par D ?
c) Combien commencent par R ?
d) Combien commencent par T et finissent par R
e) Combien ne commencent pas par I ?
f) Combien commencent par V ou par I ?
g) Combien ont les voyelles au début ?
h) Combien ont les consonnes au début ?

<u>Exercice 8</u> :

a) Combien d'anagrammes du mot ANAGRAMMES existe-t-il ?
b) Combien commencent par A ?
c) Combien finissent par N ?
d) Combien commencent par M ?
e) Combien commencent par AME ?
f) Combien commencent par ANA ?
g) Combien commencent par A et finissent par S ?
h) Combien ont les voyelles au début ?
i) Combien ne commencent pas par G ?
j) Combien finissent par M ou par S ?
k) Combien ont les trois A côte à côte (groupés) ?
l) Combien ont les lettres classées dans l'ordre alphabétique ?
m*) Combien commencent par A ou finissent par S ?
n) Combien commencent par RARE ?

Choix

<u>Exercice 9</u> :
Jean, Pierre, Anne et Luc font partie d'une classe de 14 élèves composée de 8 filles et 6 garçons. On décide de créer un comité formé de 4 élèves

a) Combien y a-t-il de comités possibles ?
b) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut un comité composé uniquement de filles ?
c) Combien y a-t-il de comités possibles si Jean ne veut pas faire partie du comité ?
d) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut un comité composé de 2 filles et 2 garçons ?
e) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut que Pierre et Jean se retrouvent ensemble dans le comité ?
f) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on ne veut pas que Anne et Luc se retrouvent ensemble dans le comité ?
g) Combien y a-t-il de comités possibles si l'on veut que Pierre, Jean et Anne soient dans le comité ?

<u>Exercice 10</u> :
D'un jeu de 36 cartes, Pierre tire 5 cartes au hasard.
Jeu : (6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) ´ 4 couleurs (cœur, carreau, trèfle et pique)

a) Combien y a-t-il de donnes possibles ?
b) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant exactement un As ?
c) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins un As ?
d) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins 3 As ?
e) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant l'As de pique ?
f) Combien y a-t-il de donnes possibles ne contenant pas l'As de carreau ?
g) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant 3 piques et 2 coeurs ?
h) Combien y a-t-il de donnes possibles ne contant pas de trèfles ?
i) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant au moins un coeur ?
j) Combien y a-t-il de donnes possibles contenant exactement un coeur ?

<u>Exercice 11</u> *:
Mario, le marchand de glaces, dispose de 5 parfums différents à savoir :

Vanille, Fraise, Citron, Banane et Myrtilles

Il propose des coupes formées de trois boules. Combien de coupent différentes peut-il créer ?

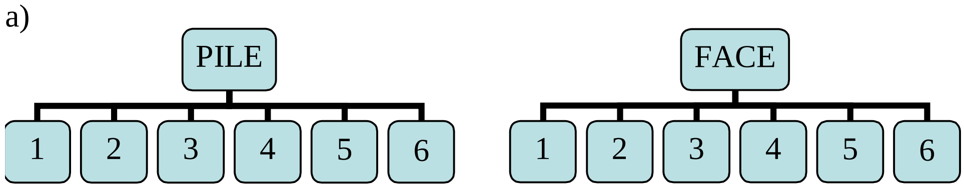
<u>Remarque</u> :
On ne tient pas compte de la disposition des boules dans la coupe donc

- la coupe(V F M) est égale à la coupe(M F V)
- la coupe(V F F) est égale à la coupe(F V F)
- coupe(V F F) n'est pas égale à la coupe(V F V)

Analyse combinatoire - Solutions détaillées des exercices

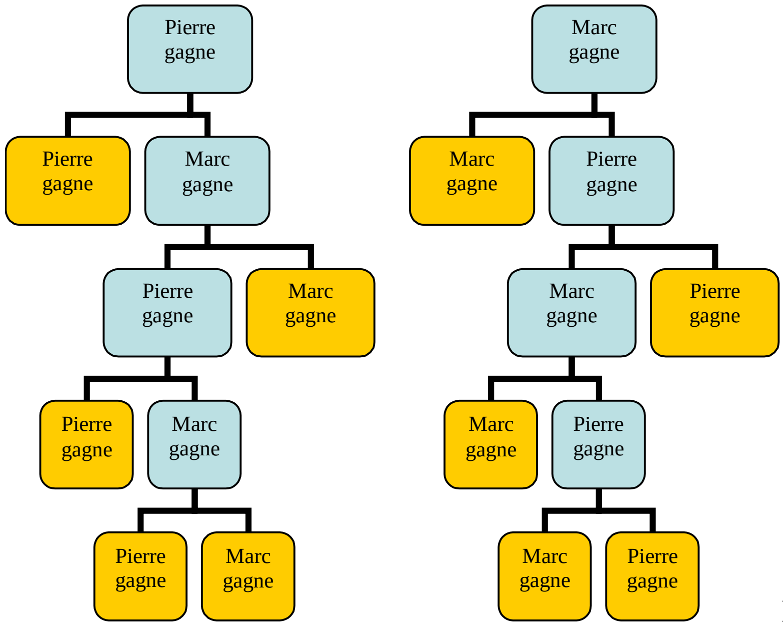
Ex 1 :

a)



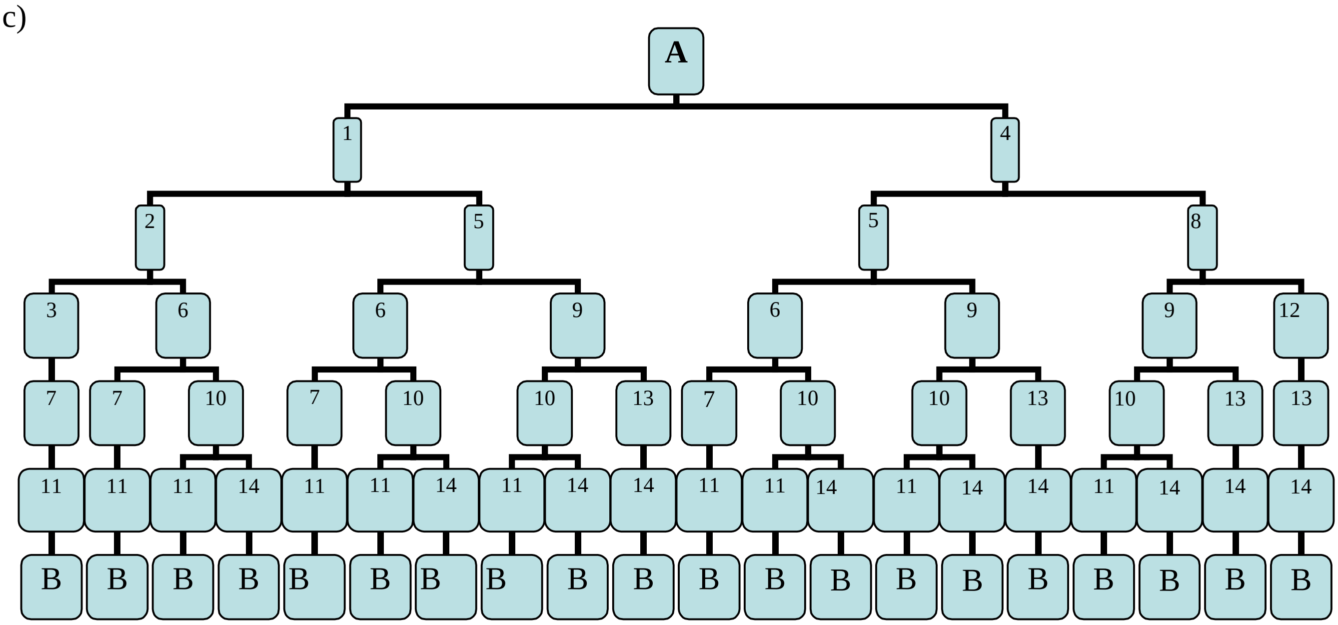
Donc 12 résultats possibles

b)



Donc 10 résultats possibles

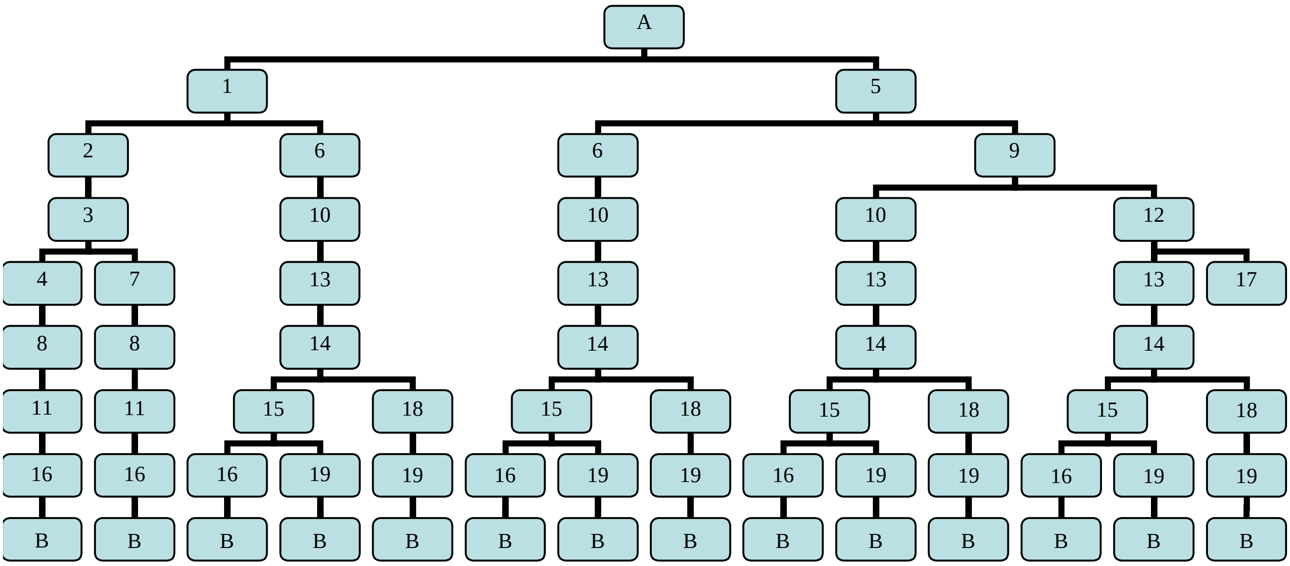
c)



Donc 20 résultats possibles

d)

On a 14 résultats possibles



Ex 2 :

a) $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17'576$

b) $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15'600$

c) $\boxed{A}\ \boxed{}\ \boxed{} \rightarrow 1 \cdot 26 \cdot 26 = 676$

d) $\boxed{A}\ \boxed{}\ \boxed{} \rightarrow 1 \cdot 25 \cdot 24 = 600$

e) $\boxed{c}\ \boxed{}\ \boxed{} \rightarrow 20 \cdot 26 \cdot 26 = 13'520$

f) $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{v} \rightarrow 26 \cdot 26 \cdot 6 = 4'056$

g) $\boxed{c}\ \boxed{c}\ \boxed{c} \rightarrow 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8'000$

h) $\boxed{v}\ \boxed{v}\ \boxed{v} \rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

i*) $$\left\{\begin{array}{ll} \text{2 mêmes lettres} & \left\{\begin{array}{l} \boxtimes\ \boxtimes\ \square \rightarrow 26 \cdot 25 = 650 \\ \square\ \boxtimes\ \boxtimes \rightarrow 26 \cdot 25 = 650 \\ \boxtimes\ \square\ \boxtimes \rightarrow 26 \cdot 25 = 650 \end{array}\right\} = 1'950 \\ \text{1 même lettre} & \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes \rightarrow 26 \end{array}\right\} = 1'976$$

j) $\boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes \rightarrow 26$

Ex 3 :

a) $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676'000$

b) $\boxed{l}\ \boxed{l}\ \boxed{n}\ \boxed{n}\ \boxed{5} \rightarrow 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 67'600$

c) $\boxed{v}\ \boxed{l}\ \boxed{n}\ \boxed{n}\ \boxed{n} \rightarrow 6 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 156'000$

d) Ceux qui se terminent par 8 : $\boxed{l}\ \boxed{l}\ \boxed{n}\ \boxed{n}\ \boxed{8} \rightarrow 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 67'600$

Donc, ceux qui <u>ne se terminent pas par 8</u> : $\text{Tous} - 67'800 = 676'000 - 67'800 = 608'400$

e) $\boxed{Z}\ \boxed{l}\ \boxed{n}\ \boxed{n}\ 3 \rightarrow 26 \cdot 10 \cdot 10 = 2600$

f) $\boxed{l}\ \boxed{l}\ \boxed{i}\ \boxed{i}\ \boxed{i} \rightarrow 26 \cdot 26 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 84'500$

g) $\boxed{v}\ \boxed{v}\ \boxed{n}\ \boxed{n}\ \boxed{n} \rightarrow 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 36'000$

h) $\boxed{l}\ \boxed{l}\ \boxed{n}\ \boxed{n}\ \boxed{n} \rightarrow 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468'000$

Ex 4 :

a) $\square\ \square\ \square \rightarrow 5\cdot 5\cdot 5=125$

b) $\square\ \square\ \square \rightarrow 5\cdot 4\cdot 3=60$

c) $\left.\begin{cases} \square\ \square\ \boxed{4} \rightarrow 5\cdot 5=25 \\ \square\ \square\ \boxed{6} \rightarrow 5\cdot 5=25 \end{cases}\right\}=50$ ou $\square\ \square\ \boxed{4\text{ ou }6} \rightarrow 5\cdot 5\cdot 2=50$

d) $\left.\begin{cases} \square\ \square\ \boxed{4} \rightarrow 4\cdot 3=12 \\ \square\ \square\ \boxed{6} \rightarrow 4\cdot 3=12 \end{cases}\right\}=12$ ou $\square\ \square\ \boxed{4\text{ ou }6} \rightarrow 4\cdot 3\cdot 2=24$

e) $\square\ \square\ \boxed{5} \rightarrow 5\cdot 5=25$

f) $\square\ \square\ \boxed{5} \rightarrow 4\cdot 3=12$

Ex 5 :

a) $\square\square\square\square\square \rightarrow 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=32$

b) $\boxed{P}\boxed{P}\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D} \rightarrow 2\cdot 2\cdot 6\cdot 6\cdot 6=864$

c) 36

d) $36\cdot 35=1260$

e) $36\cdot 36=1296$

Ex 6 :

a) $\boxed{J}\boxed{P}\boxed{H}\boxed{A}\boxed{C}\boxed{S} \rightarrow P_6=6!=720$

b) $\left.\begin{cases} \boxed{JS}\square\square\square\square \rightarrow 5!=120 \\ \boxed{SJ}\square\square\square\square \rightarrow 5!=120 \end{cases}\right\}=240$

c) $\underbrace{\square\square\square}_{\text{Garçons}}\ \Big|\ \underbrace{\square\square\square}_{\text{Filles}} \rightarrow 3!\cdot 3!=6\cdot 6=36$

d) $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\square\square\square}_{\text{Garçons}}}_{3!}\ \square\square\square}_{4!} \rightarrow 3!\cdot 4!=6\cdot 24=144$

e) $\square\boxed{G}\square\boxed{G}\square\boxed{G} \rightarrow 3!\cdot 3!=36$

f) $\boxed{J}\square\square\square\square\square \rightarrow P_5=5!=120$

g) $\boxed{SJ}\square\square\square\square \rightarrow 5!=120$

h) $\left.\begin{cases} \boxed{JC}\square\square\square\square \rightarrow 5!=120 \\ \boxed{CJ}\square\square\square\square \rightarrow 5!=120 \end{cases}\right\}=240$ Donc : $720-240=480$

i) $\boxed{A}\boxed{C}\boxed{H}\boxed{J}\boxed{P}\boxed{S} \rightarrow 1$

j) $\left.\begin{cases} \boxed{APC}\square\square\square \rightarrow 4!=24 \\ \boxed{CPA}\square\square\square \rightarrow 4!=24 \end{cases}\right\}=48$

k) $\left.\begin{cases} \boxed{P}\square\square\square\square\square \rightarrow P_5=5!=120 \\ \square\square\square\square\square\boxed{P} \rightarrow P_5=5!=120 \end{cases}\right\}=240$ Donc : $720-240=480$

l) $\boxed{JPH}\square\square\square \rightarrow 4!=24$

Ex 7 :

a) $\dfrac{8!}{2!2!} = 10'080$

e) $\dfrac{7!}{2!} = 2520$ Donc : $10'080 - 2'520 = 7'560$

b) $\dfrac{7!}{2!2!} = 1'260$

f) $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{V}}\square\square\square\square\square\square\square \rightarrow \dfrac{7!}{2!2!} = 1'260 \\ \boxed{\text{I}}\square\square\square\square\square\square\square \rightarrow \dfrac{7!}{2!} = 2'520 \end{array} \right\} = 3'780$

c) $\dfrac{7!}{2!} = 2'520$

g) $\underbrace{\boxed{\text{IIE}}}_{\frac{3!}{2!}}\ \underbrace{\square\square\square\square\square}_{\frac{5!}{2!}} \rightarrow \dfrac{3!}{2!}\cdot\dfrac{5!}{2!} = 3\cdot 60 = 180$

d) $\dfrac{6!}{2!} = 360$

h) $\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\frac{5!}{2!}}\underbrace{\boxed{\text{IIE}}}_{\frac{3!}{2!}} \rightarrow \dfrac{5!}{2!}\cdot\dfrac{3!}{2!} = 60\cdot 3 = 180$

Ex 8 :

a) $\dfrac{10!}{3!2!} = 302'400$

g) $\dfrac{8!}{2!2!} = 10'080$

b) $\dfrac{9!}{2!2!} = 90'720$

h) $\boxed{AAAE}\boxed{NGRMMS} \rightarrow \dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{6!}{2!} = 1'440$

c) $\dfrac{9!}{3!2!} = 30'240$

i) $302'400 - \dfrac{9!}{3!2!} = 272'960$

d) $\dfrac{9!}{3!} = 60'480$

j) $\dfrac{9!}{3!} + \dfrac{9!}{3!2!} = 90'720$

e) $\dfrac{7!}{2!} = 2'520$

k) $\boxed{AAA}\square\square\square\square\square\square\square \rightarrow \dfrac{7!}{2!} = 2'520$

f) $\dfrac{7!}{2!} = 2'520$

l) $\boxed{A}\boxed{A}\boxed{A}\boxed{E}\boxed{G}\boxed{M}\boxed{M}\boxed{N}\boxed{R}\boxed{S} \rightarrow 1$

m*) $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{A}\boxed{\ldots\ldots\ldots} \rightarrow \dfrac{9!}{2!2!} = 90'720 \\ \boxed{\ldots\ldots\ldots}\boxed{S} \rightarrow \dfrac{9!}{3!2!} = 30'240 \\ \boxed{A}\boxed{\ldots\ldots}\boxed{S} \rightarrow \dfrac{8!}{2!2!} = 10'080 \end{array} \right\} \rightarrow 90'720 + 30'240 - 10'080 = 110'880$

n) impossible, donc : 0

Ex 9 :

a) $C_4^{14} = \dfrac{14!}{10!4!} = 1001$; b) $C_4^{8} = 70$; c) $C_4^{13} = 715$; d) $C_2^{8}\cdot C_2^{6} = 28\cdot 15 = 420$;

e) $C_2^{12} = 66$; f) Anne et Luc ensemble : $C_2^{12} = 66$; Donc sans Anne et Luc : $1001 - 66 = 935$

g) $C_1^{11} = 11$

<u>Ex 10</u> :

a) $C_5^{36} = 376'992$ b) $\underbrace{\boxed{As}}_{C_1^4}\underbrace{\square\square\square\square}_{C_4^{32}} \rightarrow 4\cdot C_4^{32} = 143'840$

$$\text{c)}\ \left\{\begin{array}{l} \text{exactement 1 As : } \underbrace{\boxed{As}}_{C_1^4}\underbrace{\square\square\square\square}_{C_4^{32}} \rightarrow 4\cdot C_4^{32} = 143'840 \\ \text{ou exactement 2 As : } \underbrace{\boxed{As}\boxed{As}}_{C_2^4}\ \underbrace{\square\square\square}_{C_3^{32}} \rightarrow 6\cdot 4960 = 29'760 \\ \text{ou exactement 3 As : } \underbrace{\boxed{As}\boxed{As}\boxed{As}}_{C_3^4}\ \underbrace{\square\square}_{C_2^{32}} \rightarrow 4\cdot 496 = 1'984 \\ \text{ou exactement 4 As : } \underbrace{\boxed{As}\boxed{As}\boxed{As}\boxed{As}}_{C_4^4}\ \underbrace{\square}_{C_1^{32}} \rightarrow 1\cdot 32 = 32 \end{array}\right\} \text{Total} = 175'616$$

$$\text{d)}\ \left\{\begin{array}{l} \text{exactement 3 As : } \underbrace{\boxed{As}\boxed{As}\boxed{As}}_{C_3^4}\ \underbrace{\square\square}_{C_2^{32}} \rightarrow 4\cdot 496 = 1'984 \\ \text{ou exactement 4 As : } \underbrace{\boxed{As}\boxed{As}\boxed{As}\boxed{As}}_{C_4^4}\ \underbrace{\square}_{C_1^{32}} \rightarrow 1\cdot 32 = 32 \end{array}\right\} \text{Total} = 1'984 + 32 = 2'016$$

e) $C_4^{35} = 52'360$

f) $C_5^{36} - C_4^{35} = 376'992 - 52'360 = 324'632$

g) $C_3^9 \cdot C_2^9 = 84\cdot 36 = 3'024$

h) $C_5^{27} = 80'730$

$$\text{i)}\ \left\{\begin{array}{l} \text{exactement 1 } \heartsuit \text{ : } \underbrace{\boxed{\heartsuit}}_{C_1^9}\underbrace{\square\square\square\square}_{C_4^{27}} \rightarrow 9\cdot 17'550 = 157'950 \\ \text{ou exactement 2 } \heartsuit \text{ : } \underbrace{\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}}_{C_2^9}\ \underbrace{\square\square\square}_{C_3^{27}} \rightarrow 36\cdot 2'925 = 105'300 \\ \text{ou exactement 3 } \heartsuit \text{ : } \underbrace{\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}}_{C_3^9}\ \underbrace{\square\square}_{C_2^{27}} \rightarrow 84\cdot 351 = 29'484 \\ \text{ou exactement 4 } \heartsuit \text{ : } \underbrace{\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}}_{C_4^9}\ \underbrace{\square}_{C_1^{27}} \rightarrow 126\cdot 27 = 3'402 \\ \text{ou exactement 5 } \heartsuit \text{ : } \boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit}\boxed{\heartsuit} \rightarrow C_5^9 = 126 \end{array}\right\} \text{Total} = 296'262$$

j) exactement 1 $\heartsuit$: $\underbrace{\boxed{\heartsuit}}_{C_1^9}\underbrace{\square\square\square\square}_{C_4^{27}} \rightarrow 9\cdot 17'550 = 157'950$

<u>Ex 11</u> :

5 parfums $\rightarrow$ 3 boules

$$\left.\begin{array}{l} \text{1er cas : 3 boules distinctes } \rightarrow C_3^5 = 10 \text{ possibilités} \\ \left.\begin{array}{l} \text{2ème cas : 2 identiques } \rightarrow \underbrace{\boxtimes\boxtimes}_{5}\underbrace{\square}_{4} \rightarrow 5\cdot 4 = 20 \text{ possibilités} \\ \text{3ème cas : 3 identiques } \rightarrow \boxtimes\boxtimes\boxtimes \rightarrow 5 \text{ possibilités} \end{array}\right\} \text{ou } 5\cdot 5 = 25 \text{ possibilités} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Total:} \\ \text{35 possibilités}\end{array}$$