Théorème :

Considérons l'équation du second degré de la forme : $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

Selon le signe du ***discriminant*** $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$, l'équation possède 0, 1 ou 2 racines réelles :

- si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution réelle;
- si $\Delta=0$, la seule solution de l'équation est : $x=-\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta>0$, l'équation a deux racines réelles : $\boxed{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

Rappel :

Pour la démonstration on utilisera l'identité remarquable : $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$ ☺

Démonstration :

Montons le dernier cas pour résoudre l'équation : $ax^2+bx+c=0$

En multipliant par 4a on a : $\Leftrightarrow\ 4a^2x^2+4abx+4ac=0$

On ajoute la quantité nulle $+b^2-b^2$ et on a : $\Leftrightarrow\ 4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0$

En utilisant l'identité remarquable ☺, on obtient :

$$\Leftrightarrow\ (2ax+b)^2-b^2+4ac=0$$

$$\Leftrightarrow\ (2ax+b)^2=b^2-4ac$$

$$\Leftrightarrow\ 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \qquad \text{si } b^2-4ac>0. \quad \text{(deux solutions)}$$

$$\Leftrightarrow\ 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac} \qquad \text{si } b^2-4ac>0$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{si } b^2-4ac>0$$

c.q.f.d.