

# Équations du 2<sup>ème</sup> degré

## § 1. Introduction

Les années suivant –2000 et les années précédant 1600 marquent deux limites importantes dans le développement de l'algèbre. Les premières voient apparaître *les résolutions d'équations et de systèmes des deux premiers degrés*; aux secondes on associe la résolution *des équations des troisième et quatrième degrés*, qui sont aussi les dernières dont l'inconnue puisse s'exprimer à l'aide d'une **formule générale**. Ces deux mêmes limites historiques enferment aussi les extensions successives du domaine des nombres: alors qu'on se restreignait initialement aux nombres entiers ou rationnels positifs, les nombres irrationnels positifs viennent à être graduellement acceptés, puis les nombres négatifs font une timide apparition, que suit de peu la première utilisation des nombres complexes.

L'évolution de l'algèbre était lente. L'obstacle principal qui a retardé cette évolution est la façon dont les premiers algébristes décrivent, en langage usuel (algèbre rhétorique), la formation des équations et leur résolution. L'apparition de quelques abréviations (algèbre syncopée), puis progressivement la représentation des grandeurs par des lettres et celle des opérations par des symboles (algèbre symbolique), se feront essentiellement aux XV<sup>e</sup>, XVI<sup>e</sup> et XVII<sup>e</sup> siècles, abrégant considérablement la description des calculs. Les principaux artisans de ces progrès étaient allemands, anglais, flamands, français, italiens. Pour la plupart leurs noms sont tombés dans l'oubli : **Bombelli, Chuquet, Descartes, Von Eger, Girard, Harriot, Oughtred, Pacioli, Recorde, Rudolf, Stevin, Stifel, Viète**.

Parallèlement l'algèbre se développait de façon importante, au niveau des méthodes. La découverte de formules pour la résolution des équations de degré 3 ou 4, formules ne faisant intervenir que les opérations fondamentales d'addition, soustraction, multiplication et division, aussi bien que des extractions de racines, est due à des mathématiciens italiens, dans la première moitié du XVI<sup>e</sup> siècle.

Les inventeurs se gardaient bien de divulguer leurs découvertes. On peut néanmoins attribuer à **Scipione del Ferro** (1465 - 1526) la résolution de l'équation du 3<sup>e</sup> degré, vers 1515, retrouvée indépendamment par **Nicolo Fontana dit Tartaglia** ou «**le Bègue**» (1499-1557). La formule correspondante a été publiée pour la première fois par **Jérôme Cardan** (1501-1576) dans son traité d'algèbre intitulé *Ars Magna* (1545), ce qui provoqua la colère de **Tartaglia** et déclencha une longue polémique. L'*Ars Magna* contenait également la méthode de **Ludovico Ferrari** (1522- 1565) pour résoudre l'équation du 4<sup>e</sup> degré.

## § 2. Théorie des équations polynomiales

La théorie des équations est une branche des mathématiques qui étudie la nature des *racines* d'équations polynomiales et les méthodes permettant de trouver ces racines. La théorie des équations a de nombreuses applications en mathématiques et dans d'autres sciences.

Une **équation polynomiale** de degré  $n$  est de la forme :  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$

où les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des réels quelconques, avec  $a_n \neq 0$ .

Le réel  $x$  est une **racine** du polynôme, si et seulement si il vérifie l'égalité ci-dessus. Une équation polynomiale est résolue lorsque toutes les racines de l'équation ont été déterminées.

Cas particuliers :

1) Une **équation linéaire** est une équation du premier degré, de la forme  $ax + b = 0$ .

Son unique racine est :  $x = -\frac{b}{a}$

2) Une **équation quadratique** est une équation du second degré, de la forme :  $ax^2 + bx + c = 0$