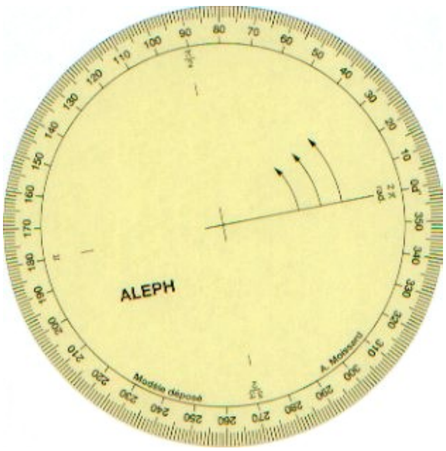
SERIE 13
Trigonométrie – Mesure d'angle

<u>La mesure de l'angle</u>
Les quatre unités principales de mesure d'un angle géométrique sont le **degré**, le **radian**, le grade et le tour.
Le **degré** peut être utilisé avec deux sous-unités : **minute**, **seconde**.
Une mesure peut donc être un nombre décimal ou un nombre en degré, minute, seconde.

<u>Le degré</u> :
La mesure des angles en degrés correspond au plus ancien des modes de division du cercle. Il consiste à rapporter l'unité d'angle à une unité d'arc qui est la **360ème partie du cercle** :
arc ou angle-unité sont alors dits de un degré et noté **1°**.
Par définition on a:

- Il y a 90 degrés dans un Droit. Ce qui s'écrit: **1D=90°**.
- Il y a 60 **minutes d'angle** dans un degré. Soit: **1°=60'**
  (Il faut remarquer apostrophe qui exprime les minutes d'angle et à ne pas confondre avec une durée).
  Remarque: 1'=1°/60 ou 1/60 de degré
- Il y a 60 **secondes d'angle** dans une minute d'angle : **1'=60"**
  Donc: 1°=60 x 60=3600" (60' valant chacune 60").
  Remarque: 1"=1°/3600 ou 1'/60.



<u>Exemples</u>:
1) **45°20'50"** soit 45·3600 + 20·60 + 50 = 163250"
   La manipulation de ces unités se fait comme avec les unités de durée.
   Aussi : 45°20'50" = 45° + 20/60 + 50/3600 = 45 + 0,333333 + 0,0138 = **45,347°**
2) En général, nous n'utilisons pas les sous multiples du degré (écriture sexagésimale). Nous préférons utiliser une écriture décimale.
   Par exemple: 30,5° <u>ne signifie pas</u> 30° et 5 minutes d'angle mais 30° et 0,5° = 0,5 · 60 = 30'
   finalement: 30,5° = 30°30'

<u>Exercice 1</u> :
Effectuer les conversions demandées.

a) $37^\circ 42' =$ ....°

b) $47,25^\circ =$ ....° ....' ...."

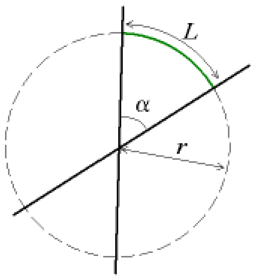
c) $120^\circ 35' 42'' =$ ....°

d) $20,32^\circ =$ ....° ....' ...."

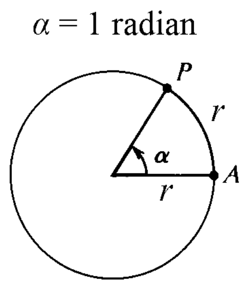
<u>Remarque</u> :
- La navigation maritime à conduit à la mesure en **gradient** où 90° = 100 gr
- Le **tour** utilisé conjointement avec les vitesses angulaire est largement utilisé en mécanique donne que 1 tour = 360°

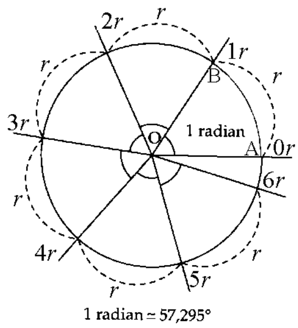
En premier lieu la nécessité du radian est du domaine de **l'analyse** (pour ne citer que les fonctions trigonométriques). Néanmoins en géométrie la mesure des angles en radian simplifie considérablement la relation entre la longueur d'un arc L et l'angle dont il rend la mesure α, en effet un arc représente en effet autant de radian qu'il mesure de rayons.

<u>Le radian</u> :
Un radian, noté rad, est la mesure d'un angle au centre sous-tendu par un arc L égale au rayon du cercle *r*.



$\alpha = \dfrac{L}{r}$





En comptant le nombre de reports qui seraient nécessaires pour couvrir le cercle entier on trouve environ « 6 fois et 1 quart ». Rien d'étonnant, car c'est comme si on cherchait à mesurer la longueur du cercle avec son rayon comme unité. 1 tour = 2πr ≈ 6,28r

Si on prend le rayon pour unité de longueur on peut alors énoncer que :
« Sur un cercle unité, la mesure de la longueur d'un arc et celle de l'angle qui si rapporte expriment le même nombre. »

Donc : $360° = 2\pi$ rad. $\qquad$ $1 \text{ rad} = \dfrac{360°}{2\pi} \approx 57{,}3°$

Aussi : $180° = \pi$ rad.

<u>Remarque</u> :

- L'expression d'un angle sans indication d'unité signifie une mesure en radian. La mesure en degré doit être expressément indiquée.
- Il est bien plus commode d'exprimer une mesure en radian par des facteurs de π que par un nombre décimal. Cela donne des divisions rationnelles du cercle.
- Le passage des degrés en radians et réciproquement est un simple exercice de proportion.
  $\dfrac{x\,°}{180°} = \dfrac{y \text{ rad.}}{\pi}$

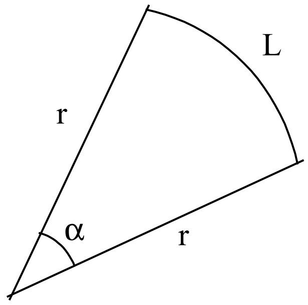
<u>Exercice 2</u> :
Compléter le tableau suivant :

Degrés	0°	30°			90°	120°					300°
Radians			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$					π	$\frac{3\pi}{2}$	

17,5°			160°
	1,2	2,1	

Représenter ensuite ces angles sur le cercle trigonométrique.

Application sur le secteur d'un disque : α en degrés α´ en radians

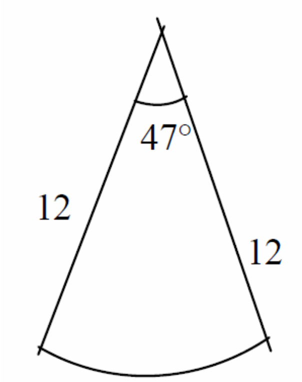


Aire : $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} r^2 \alpha'$

Longueur : $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = r \cdot \alpha'$

Exercice 3

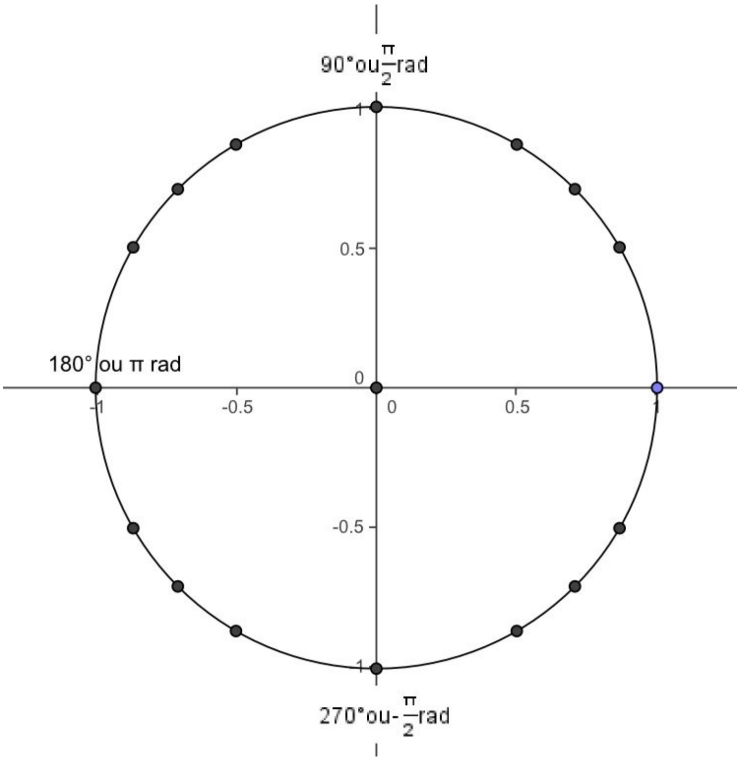
Calculer l'aire et le périmètre de la figure suivante :



Exercice 4

Placer sur le cercle les points correspondants aux angles orientés dont les mesures α sont données dans le tableau.

Points	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
Radians	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{3}$	$-\frac{23\pi}{4}$	51π	$-\frac{38\pi}{3}$	$\frac{43\pi}{4}$	$-\frac{28\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{2}$



Vitesses angulaire & vitesse linéaire :

- La vitesse angulaire d'une roue qui tourne à vitesse constante est l'angle généré par unité de temps du segment de droite allant du centre de la roue au point P sur la circonférence.

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

Elle peut-être exprimée **[rad/s]**, [rad/min], [tours/m], …

- Or la vitesse linéaire d'un point P sur cette même circonférence est la distance « horizontale » ou linéaire parcourue par unité de temps.

$$v = \frac{d}{t}$$

Elle peut-être exprimée **[m/s]**, [km/h], …

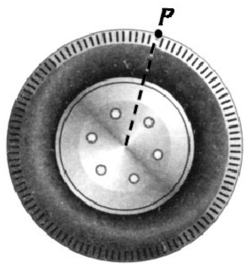
Remarque :

- La fréquence est définie par : $\omega = 2\pi f$
- La vitesse angulaire ne dépend par du diamètre de la roue, il n'en est pas de même de la vitesse linéaire.
- L'utilisation de la longueur d'un segment permet de passer de l'une à l'autre. : $v = \omega \cdot r$

Exercice 5* :

Supposons qu'une roue de voiture de 50 cm de diamètre tourne à la vitesse constante de 1600 tpm.

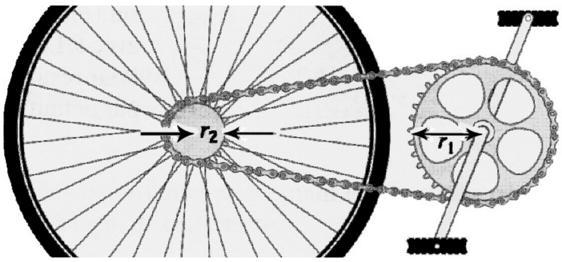
a) Donner la vitesse angulaire de la roue.



b) Trouver la vitesse linéaire.

Exercice 6* :

Sur la figure ci-contre on voit la mécanique d'une bicyclette avec $r_1 = 13$ cm et $r_2 = 5$ cm.
Un cycliste expérimenté peut atteindre une vitesse de 64 km/h. Si la roue a un diamètre de 71 cm évaluer la vitesse en tours/min du pignon avant pour atteindre une telle vitesse linéaire.



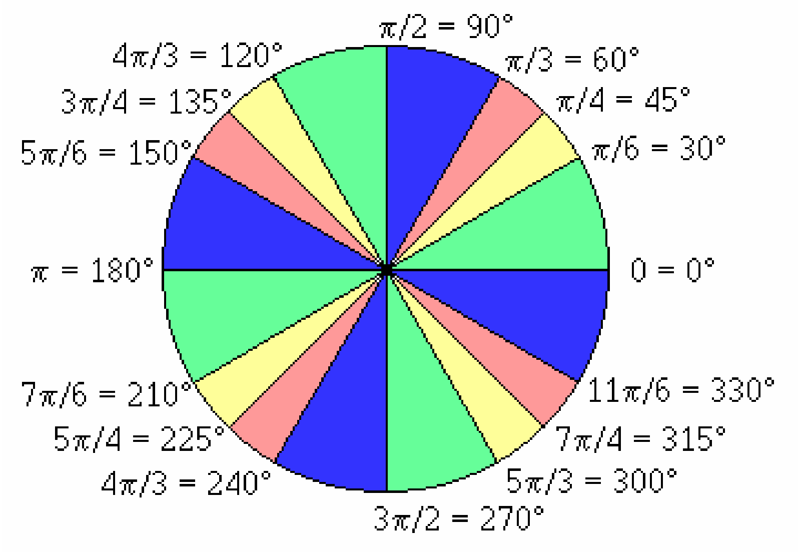
Indications :

On peut travailler avec θ_1 et θ_2 en radians et rendre compte de leur relation avec r_1 et r_2 .
Aussi convertir les km/h en cm/s peut être plus commode.

Solutions :

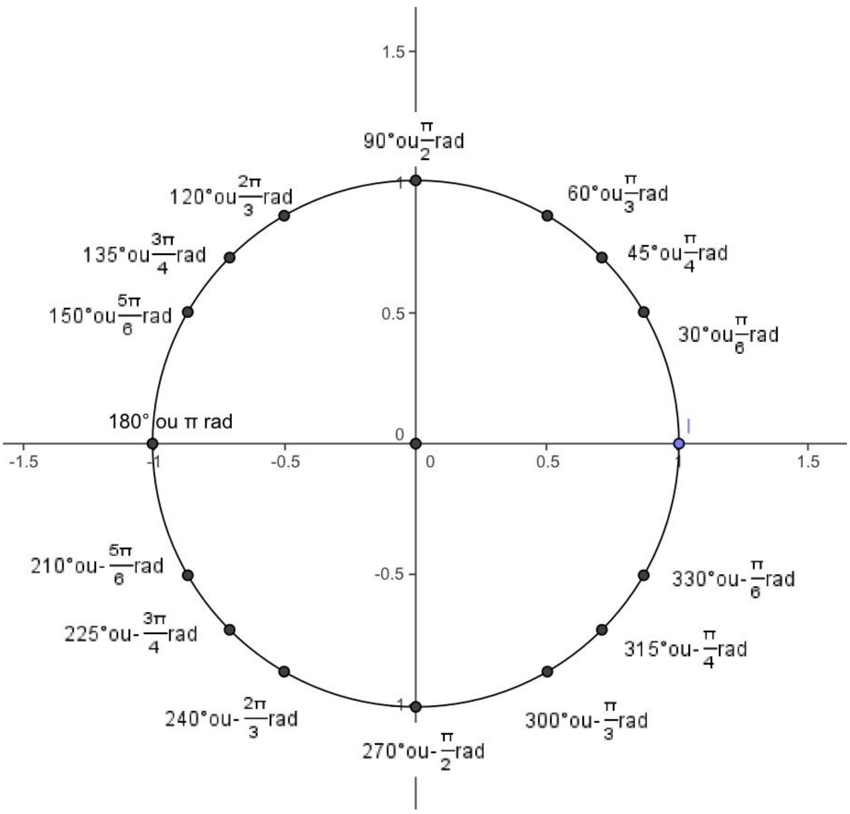
Ex 1 :

Ex 2 :



Ex 3:
A= 59,06 cm²
P =33,84 cm

Ex 4:



Ex 5 : a) 167,5 rad/s ; b) 150,8 km/h

Ex 6 : 184 tours/min