# SERIE 31
# Applications du second degré – Les paraboles

## Etude algébrique de la parabole pour une représentation graphique

Soit le trinôme du $2^{\text{ème}}$ degré $ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) et sa fonction associée :

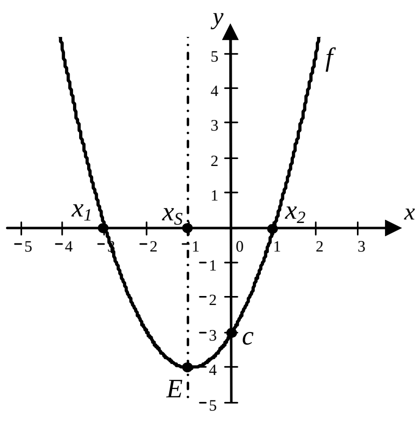
$$\boxed{\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto f(x)=ax^2+bx+c \end{array}}$$

- Une telle fonction est toujours représentée par une **parabole d'axe vertical** (ou axe des ordonnées)
- **La courbure :** si $\boxed{a>0}$ la parabole est tournée vers le haut : **convexe**.
  si $\boxed{a<0}$ la parabole est tournée vers le bas : **concave**.
- **L'axe de symétrie vertical** a pour **équation** : $x_S=-\dfrac{b}{2a}$
- Le point $E=\left\langle -\dfrac{b}{2a};f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right\rangle$ est le **sommet de la parabole** ; c'est un **minimum** si $a>0$, un **maximum** si $a<0$.
- **L'ordonnée à l'origine *c*** est la hauteur à laquelle la parabole coupe l'axe vertical.
  La parabole coupe l'axe vertical au point $\boxed{\langle 0;c\rangle}$
- **Les zéros :** c'est l'endroit, s'il existe, où la parabole coupe l'axe horizontal.
  - Si $\boxed{\Delta>0}$ alors $f(x)$ s'annule en $x_1$ et $x_2$ ; la **parabole coupe en deux points** : $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
  - Si $\boxed{\Delta=0}$ alors $f(x)$ **s'annule en un seuil point** lorsque $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\dfrac{-b}{2a}$ ; la **parabole est tangente** à l'axe *x*.
  - Si $\boxed{\Delta=b^2-4ac<0}$ alors $f(x)$ ne s'annule pas; **la parabole ne coupe pas l'axe des *x*** (ou axe des abscisses).

---

**Exemple :**

Soit $\boxed{f(x)=x^2+2x-3}$

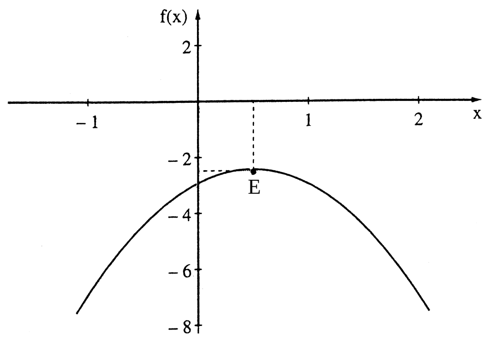



- $\boxed{a>0}$ la parabole est convexe.
- L'axe de symétrie vertical a pour équation : $\boxed{x_S=-\dfrac{2}{2\cdot 1}=-1}$
- Le sommet de la parabole est $\boxed{E=\langle -1;-4\rangle}$, c'est un minimum.
- L'ordonnée à l'origine est $\boxed{c=-3}$.
  La parabole coupe l'axe vertical au point $\boxed{\langle 0;-3\rangle}$
- $\boxed{\Delta=16>0}$ la parabole possède donc deux zéros :
  $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}$, c'est-à-dire : $\boxed{x_1=-3}$ et $\boxed{x_2=1}$

Exemples :

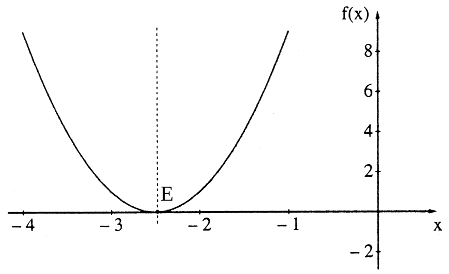
1) Soit la parabole donnée par : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = -2x^2 + 2x - 3$$



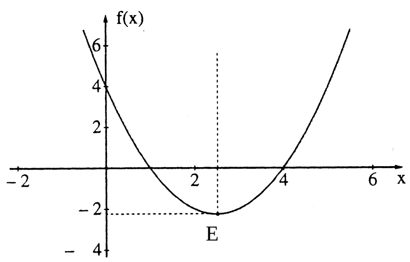

2) Soit la parabole donnée par : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = 4x^2 + 20x + 25$$




3) Soit la parabole donnée par : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 5x + 4$$




---

**Exercice :**

Faire l'étude algébrique des paraboles ci-dessous et tracer l'allure de ces paraboles.

1) $f: x \mapsto x^2 + 4x - 5$

2) $f: x \mapsto -x^2 + 2x + 8$

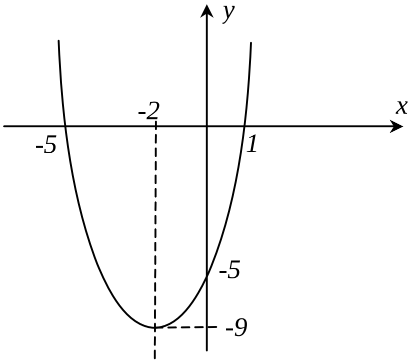
3) $f: x \mapsto x^2 + 4x - 12$

4) $f: x \mapsto -x^2 + 3x + 4$

***Solutions :***

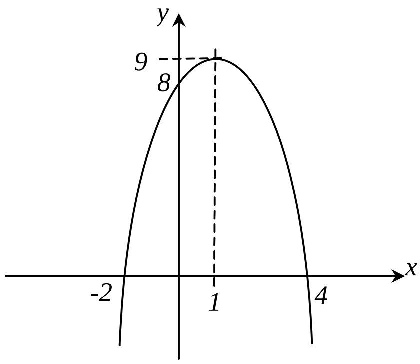
*Ex 1* : $f(x)=x^2+4x-5 \qquad (a=1\ ;\ b=4\ ;\ c=-5)$

- *Courbure :* $a>0$ *donc convexe*
- *Axe de symétrie :* $x_s=-\dfrac{4}{2\cdot 1}=-2$
- *Sommet :* $f(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)-5=-9$ *; donc :* $E=<-2;-9>$ *minimum*
- *L'ordonnée à l'origine :* $c=-5$*, donc* $<0\,;-5>$
- *Les zéros :* $\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot(-5)=16+20=36$ *; donc :* $x_1=\dfrac{-4+\sqrt{36}}{2\cdot 1}=1$ *et* $x_2=...=-5$
- *Esquisse :*



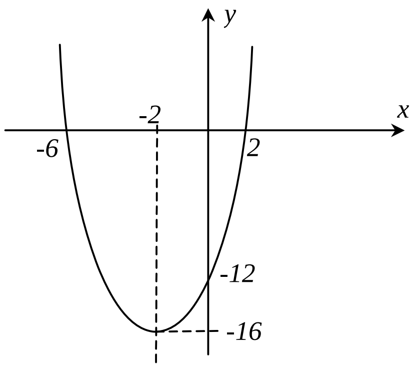

*Ex 2* : $f(x)=-x^2+2x+8 \qquad (a=-1\ ;\ b=2\ ;\ c=8)$

- *Courbure :* $a<0$ *donc concave*
- *Axe de symétrie :* $x_s=-\dfrac{2}{2\cdot(-1)}=1$
- *Sommet :* $f(1)=9$ *; donc :* $E=<1;9>$ *maximum*
- *L'ordonnée à l'origine :* $c=8$*, donc* $<0\,;8>$
- *Les zéros :* $\Delta=36$ *; Donc :* $x_1=-2$ *et* $x_2=4$




*Ex 3* : $f(x)=x^2+4x-12 \qquad (a=1\ ;\ b=4\ ;\ c=-12)$

- *Courbure :* $a>0$ *donc convexe*
- *Axe de symétrie :* $x_s=-\dfrac{4}{2\cdot 1}=-2$
- *Sommet :* $f(-2)=-16$ *; donc :* $E=<-2;-16>$ *minimum*
- *L'ordonnée à l'origine :* $c=-12$*, donc* $<0\,;-12>$
- *Les zéros :* $\Delta=64$ *; Donc :* $x_1=2$ *et* $x_2=-6$




*Ex 4* : $f(x)=-x^2+3x+4 \qquad (a=-1\ ;\ b=3\ ;\ c=4)$

- *Courbure :* $a<0$ *donc concave*
- *Axe de symétrie :* $x_s=1{,}5$
- *Sommet :* $f(1{,}5)=6{,}25$ *; donc :* $E=<1{,}5;6{,}25>$ *maximum*
- *L'ordonnée à l'origine :* $c=4$*, donc* $<0\,;4>$
- *Les zéros :* $\Delta=25$ *; Donc :* $x_1=-1$ *et* $x_2=4$