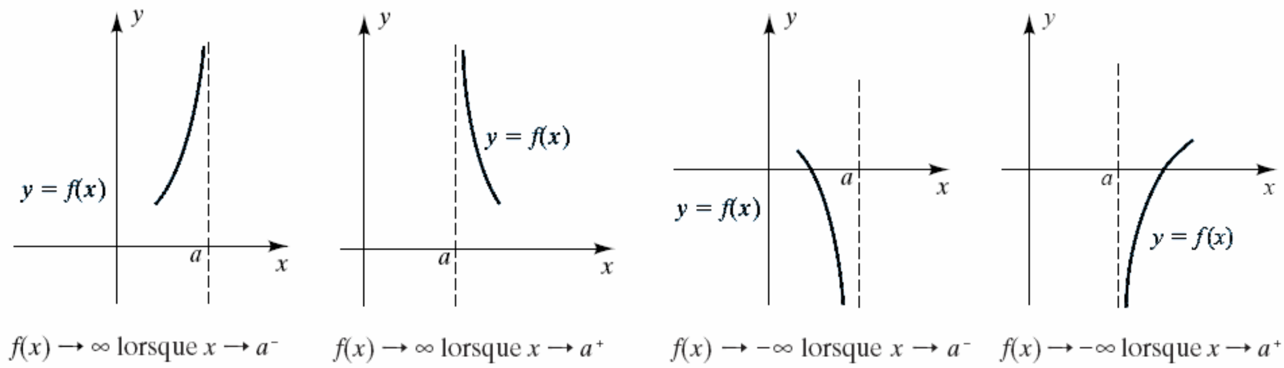
SERIE 36
Les fonctions

Les asymptotes

<u>L'asymptote verticale</u>:
La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** pour le graphique de la fonction f si

$$f(x) \to \infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \to -\infty$$

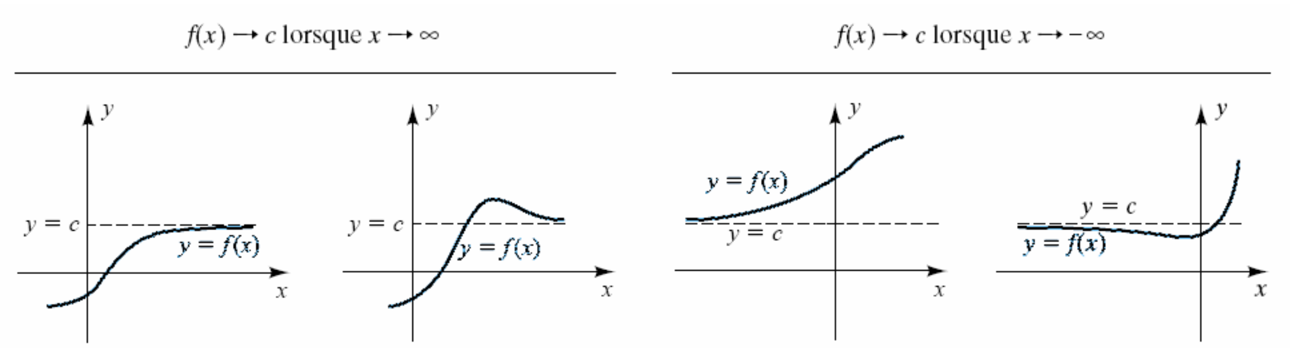
lorsque x tend vers a par la gauche ou par la droite.



N.B. Dans le cas des fonctions rationnelles les asymptotes verticales possibles sont facilement identifiables par les divisions par zéro. Si a est un zéro du dénominateur de la fonction rationnelle f, alors il est possible que le graphique de f ait une asymptote verticale en x = a. Il y a des fonctions rationnelles pour lesquelles ce n'est pas le cas. Si le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteur commun, alors f admet une asymptote verticale en x = a.

<u>L'asymptote horizontale</u>:
La droite $y = c$ est une **asymptote horizontale** pour le graphique de la fonction f si

$$f(x) \to c \qquad \text{lorsque } x \to \infty \qquad \text{ou} \qquad \text{lorsque } x \to -\infty$$

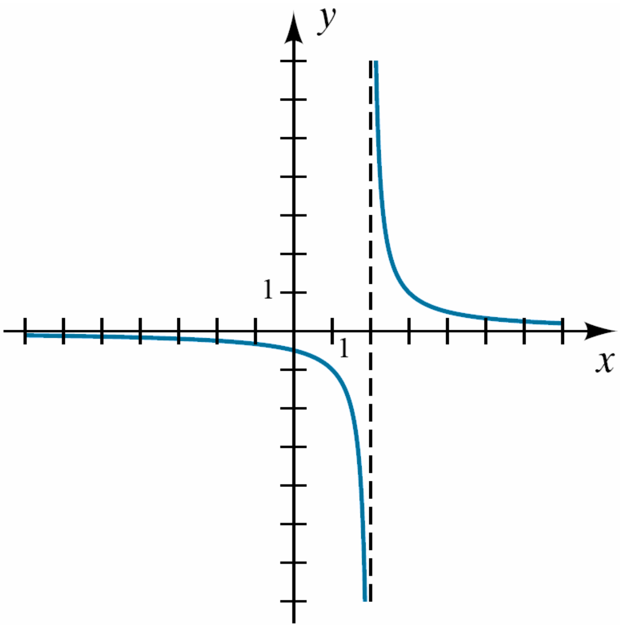


N.B. f(x) peut tendre vers un nombre c lorsque x devient très grand par valeurs positives ou négatives ; c'est-à-dire que le graphique peut avoir une asymptote horizontale y = c. Il y a des fonctions rationnelles pour qui ce n'est pas le cas.

Exemple :

La fonction $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ admet la droite d'équation $x=2$ comme asymptote verticale.

Et la droite $y=0$ (l'axe des x) est une asymptote horizontale.



Le théorème suivant est utile pour déterminer l'asymptote horizontale du graphique d'une fonction rationnelle.

THÉORÈME DES ASYMPTOTES HORIZONTALES

Soit $f(x)=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_1 x + b_0}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_k \neq 0$

1) Si $n < k$, alors l'axe des x (la droite y = 0) est l'asymptote horizontale du graphique de f.

2) Si $n = k$, alors la droite $y=\dfrac{a_n}{b_k}$ (le rapport des coefficients dominants) est l'asymptote horizontale du graphique de *f*.

3) Si $n > k$, le graphique de *f* n'a pas d'asymptote horizontale.
Au lieu de cela, *f(x)* tend vers ±∞ lorsque *x* tend vers ±∞.

Exemples :

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-x-6}$ Le polynôme du dénominateur est de degré supérieur donc la droite $y=0$ (l'axe des x) est l'asymptote horizontale.

b) $g(x)=\dfrac{5x^2+1}{3x^2-4}$ Les polynômes du numérateur et du dénominateur sont de même degré, donc $y=\dfrac{5}{3}$ est l'asymptote horizontale

c) $h(x)=\dfrac{2x^4-3x^3+5}{x^2+1}$ Le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, donc Il n'y a pas d'asymptote horizontale

Remarques :
Dans l'exemple a), on montre pour x très grand que :

$$f(x)=\frac{3x-1}{x^2-x-6}=\frac{\frac{3x-1}{x^2}}{\frac{x^2-x-6}{x^2}}=\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}\underset{x\to\pm\infty}{\approx}\frac{0-0}{1-0-0}=0$$

Dans l'exemple b), on a :

$$g(x)=\frac{5x^2+1}{3x^2-4}=\frac{\frac{5x^2+1}{x^2}}{\frac{3x^2-4}{x^2}}=\frac{5+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x^2}}\underset{x\to\pm\infty}{\approx}\frac{5-0}{5-0}=0$$

Exercice 1 :
Trouver le domaine de définition, les points remarquables et les asymptotes pour :

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{(x-2)\cdot(x+3)}$ b) $g(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)\cdot(2x+3)}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-9}{2x+2}$

Exercice 2 :
Trouver le domaine de définition, les points remarquables et les asymptotes pour :

a) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}$ b) $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$ c) $h(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-9}$

Exercice 3 :
Trouver le domaine de définition, les points remarquables et les asymptotes pour :

a) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-10x+25}$ b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$ c) $h(x)=\dfrac{x-x^2}{x^2+x-2}$