

SERIE 53

Les inéquations

Systèmes d'inéquations à une inconnue

Voici un système de deux inéquations à une inconnue :

$$\begin{cases} x-4 \leq 2x+1 & [1] \\ -2x+5 \geq 5x-2 & [2] \end{cases}$$

Résoudre un tel système c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue x qui vérifient à la fois [1] et [2]. Ces valeurs sont **solutions** du système.

Marche à suivre :

Résoudre l'inéquation [1] $\rightarrow S_1$

Résoudre l'inéquation [2] $\rightarrow S_2$

Chercher les nombres qui sont solution à la fois de [1] et de [2].

Ces nombres forment l'ensemble des solutions du système : $S = S_1 \cap S_2$

Résolution de [1] :

$$x-4 \leq 2x+1$$

$$x-2x \leq 1+4$$

$$-x \leq 5$$

$$\boxed{x \geq -5}$$

$$S_1 = \{x \mid x \geq -5\} = [-5; +\infty[$$

Résolution de [2] :

$$-2x+5 \geq 5x-2$$

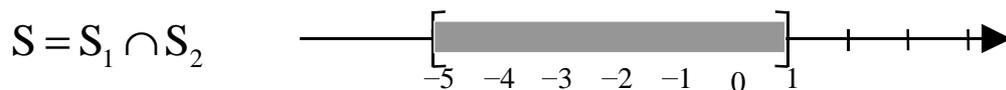
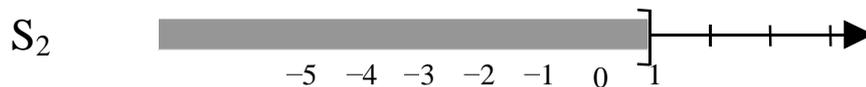
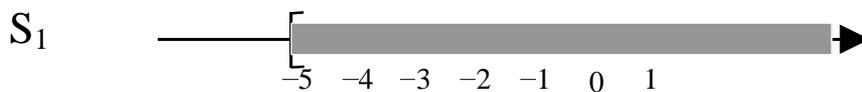
$$-2x-5x \geq -2-5$$

$$-7x \geq -7$$

$$\boxed{x \leq 1}$$

$$S_2 = \{x \mid x \leq 1\} =]-\infty; 1]$$

Pour trouver les nombres x qui sont à la fois dans S_1 et dans S_2 , représentons graphiquement les ensembles :



On voit en comparant les représentations graphiques de S_1 et S_2 que :

$$S = \{x \mid -5 \leq x \leq 1\} = [-5; 1]$$

Exercice 1 :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et donner la réponse sous forme d'intervalle :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3 \leq 5x + 1 \\ -2x \geq -3x + 4 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} \frac{7x-2}{4} + \frac{5x-1}{2} \geq \frac{12x+3}{8} \\ \frac{3x+4}{6} - \frac{1}{3} \geq \frac{5x-2}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } 3x - 1 \leq 5x \leq 2x + 4 \quad \text{e) } \begin{cases} 2 \cdot (3x - 4) + 5x \leq 3 \cdot (5x - 10) + 7x \\ 3x - 2 \cdot (5x - 4) \geq 3x - (-2x + 4) \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} \leq \frac{4x-3}{3} \\ \frac{5x+4}{5} \geq \frac{6x+5}{10} \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} \frac{2x-3}{7} - \frac{5x-2}{14} \geq \frac{5x-6}{7} - 1 \\ \frac{4x-1}{11} - \frac{2x+2}{22} < \frac{7x-6}{11} \end{cases}$$

Exercice 2 :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et donner la réponse sous forme d'intervalle :

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 4 < 1 \\ 5x - 2 \geq 3x - 12 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + 1 \geq x - \frac{3}{2} \\ 2x - 1 \leq 1 - 3x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x + 5 > \frac{x}{2} - 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 5x - 2 < \frac{x+50}{3} \\ 2x - 1 > x + 3 \end{cases}$$

Exemple :

Voici un système de trois inéquations à une inconnue :

$$\begin{cases} 3x \leq 45 & [1] \\ x \geq -10 & [2] \\ x + 3 > 3 & [3] \end{cases}$$

Donner l'intervalle solution de ce système.

Exercice 3 :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et donner la réponse sous forme d'intervalle :

$$a) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \geq 2x + \frac{5}{2} \\ 1 - 5x < 16 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \geq 2x + \frac{5}{2} \\ 1 - 5x \leq 16 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \leq 2x + \frac{5}{2} \\ 1 - 5x > 16 \end{cases}$$

$$d) 8 \leq 3x - 1 < 17$$

$$e) 0 < 10x \leq 1$$

$$f) 1 \leq x \leq 17$$

$$g) \begin{cases} x \leq 50 \\ x \geq 10 \\ x < 3 \\ x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x \leq 50 \\ x < 10 \\ x < 3 \\ x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x > 50 \\ x \geq 10 \\ x < 3 \\ x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x \leq 50 \\ x \geq 10 \\ x < 3 \\ x \geq -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$k) 40 < 8x < 80$$

$$l) 5 < x > 2$$

$$m) 5 > x < 2$$

Exercice 4 :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et donner la réponse sous forme d'intervalle :

$$a) \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 > x - 2 \\ 3(1 - 3x) \leq 7 - 8x \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 \leq x - 2 \\ 3(1 - 3x) \leq 7 - 8x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 \leq x - 2 \\ 3(1 - 3x) > 7 - 8x \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 > x - 2 \\ 3(1 - 3x) \geq 7 - 8x \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x \leq 100 \\ x < 80 \\ x > -5 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 300x \leq 300,5 \\ 400x > 400,5 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 300x > 300,5 \\ 400x > 400,5 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 300x \geq 300,5 \\ 400x < 400,5 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 300x \leq 300,5 \\ 400x \leq 400,5 \end{cases}$$

Exercice 5 :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et donner la réponse sous forme d'intervalle :

$$a) \frac{x-2}{5} + \frac{x}{2} \leq 3x - 5 \leq x - \frac{2x-1}{3}$$

$$b) \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ \frac{5x-4}{2} - \frac{x+3}{4} > 2x - 4 \\ \frac{x}{2} - 3 \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 6 :

La longueur d'un rectangle dépasse de 7 dm sa largeur. On sait que son périmètre est compris entre 20 dm et 26 dm. Que peut-on dire au sujet de sa largeur ?

Exercice 7 :

La hauteur d'un trapèze mesure 5 m. Une de ses bases est le double de l'autre. On sait que son aire est comprise entre 60 m² et 120 m².

Quelle est la plus petite longueur possible pour chacune de ses bases ? Et la plus grande ?

Exercice 8 :

La largeur d'une pelouse rectangulaire est la moitié de sa longueur. Cette pelouse est bordée d'une allée de 1 m de large. On sait que l'aire de l'allée est comprise entre 112m^2 et 208m^2 . Encadrer aussi bien que possible la largeur de cette pelouse.

Exercice 9 :

François a 32 ans et Jocelyn a 5 ans. Pendant combien d'années l'âge de François restera-t-il plus grand que quatre fois celui de Jocelyn ?

Exercice 10 :

La somme de trois entiers consécutifs est plus grande que 367, mais plus petite que 372. Quels sont ces trois entiers ?

Exercice 11 :

Un père a deux enfants. Le fils a 5 ans de moins que sa sœur, qui a 20 ans de moins que son père. La somme de leurs âges dépasse 70 ans. L'âge du père est plus du double de celui de sa fille. Quel est l'âge de chacun ? (Les âges sont exprimés en nombres entiers.)

Solutions:

Ex 1: a) $S = [4; \infty[$; b) $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right]$; c) $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$; d) $S = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$; e) $S = \emptyset$; f) $S =]1; 2]$

Ex 2: a) $S = \left[-5; -\frac{3}{4}\right[$; b) $S = [-3; \infty[$; c) $S = \left[-\frac{5}{2}; \frac{2}{5}\right]$ d) $S = \emptyset$

Ex 3: a) $] -3; -15/7]$ b) $[-3; -15/7]$ c) $\{ \}$ d) $[3; 6[$ e) $]0; 0,1]$
 f) $[1; 17]$ g) \emptyset h) $[-1; 0[$ i) \emptyset j) $\{ \}$
 k) $]5; 16[$ l) $]5; \infty[$ m) $] -\infty; 2[$

Ex 4: a) $[-4; 10[$ b) $[10; \infty[$ c) $\{ \}$ d) $] -\infty; -4[$ e) $] -1; 50]$
 f) $\left[\frac{4005}{4000}; \frac{3005}{3000}\right]$ g) $\left[\frac{3005}{3000}; \infty\right[$ h) \emptyset i) $\left] -\infty; \frac{4005}{4000}\right]$

Ex 9 : pendant 2 ans

Ex 10 : 122, 123, 124 ou 123, 124, 125

Ex 11 : Père : 38 à 40 ans ; Fille : 18 à 20 ans ; Fils : 13 à 15 ans.