SERIE 54
Les inéquations

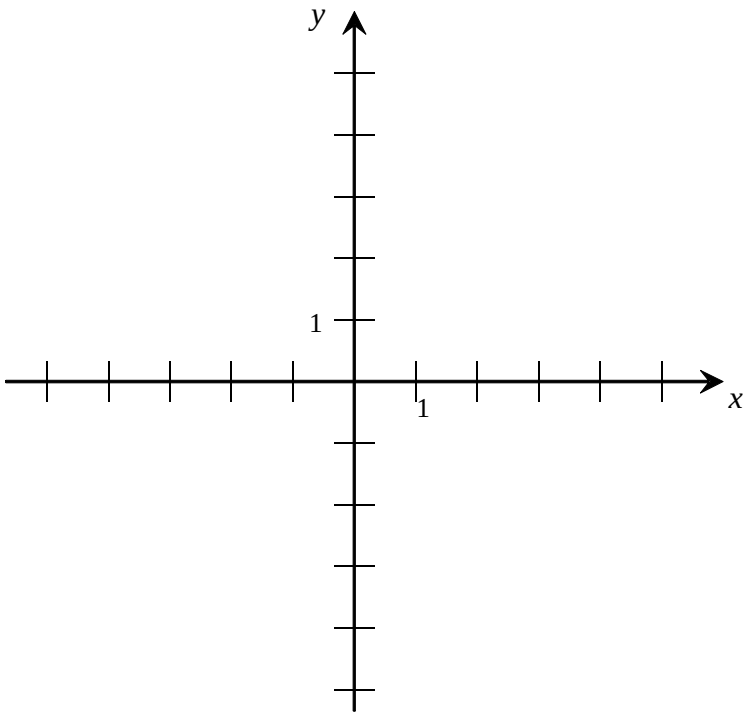
Résolution de systèmes d'inéquations d'ordre un à deux inconnues (graphiques)

Méthode :
Pour résoudre un système d'inéquations d'ordre un on procède comme suit :

- Pour chaque inéquation, on isole *y* et on représente la droite associée ;
- On hachure la zone solution de chaque inéquation (demi-plan);
- L'intersection des zones (demi-plans) nous donne l'ensemble des solutions (généralement une surface).

Exemple :
Donner graphiquement la solution du système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 4y - x - 4 \geq 0 \\ y - x \leq 3 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$



Le point P(-1;2) appartient-il au domaine de solution ?

Exercices 1 :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x+y<1 \\ 3x-y>1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y>1 \\ x-y<3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y>2 \\ -x-y<4 \end{cases}$

Exercices 2 :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivant :

a) $\begin{cases} -6x+24<5y \\ x-y>-1 \end{cases}$

Le point P(4 ;0) est-il solution ?

b) $\begin{cases} x-2>0 \\ y\geq 0 \\ x-y<4 \\ x+2y\leq 16 \end{cases}$

Exercices 3 :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 3x+y-5\geq 0 \\ 5x-2y+1\leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+4\geq 0 \\ \frac{2}{3}x-2y+4\leq 0 \\ -x-y+7\geq 0 \end{cases}$

Exercices 4 [1] :

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 5x+y-1\leq 0 \\ 3x-y+2\geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y-3>0 \\ x-2>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+y-1\geq 0 \\ x-2y+4\leq 0 \\ x+2y-7\leq 0 \end{cases}$

A(1;-10) est-il solution ? B(5;-5) est-il solution ?

C(1;4) est-il solution ?

Exercices 5 [2] :

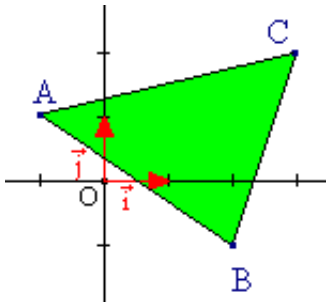
Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x+y-2<0 \\ x-2y+1>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-2\leq 0 \\ 5x-4y-24<0 \\ 3x+y+4>0 \end{cases}$

Exercices 6 :

On considère les points A(-1 ; 1), B(2 ; -1) et C(3 ; 2).
Déterminer un système d'inéquations linéaires à deux inconnues dont l'intérieur du triangle (ABC) est la solution.



[1] Source : http://www.up.univ-mrs.fr
[2] Source : http://tanopah.jo.free.fr

Problèmes d'optimisation

Exemple[3] **:**
Une usine produit deux modèles de machines, l'une que l'on appellera modèle A exige 2 kg de matière première et de 30 heures de fabrication et donne un bénéfice de 7 €. L'autre que l'on appellera B exige 4 kg de matière première et de 15 heures de fabrication et donne un bénéfice de 6 €. On dispose de 200 kg de matière première et de 1200 h de travail. Quelle production doit-on avoir pour obtenir un bénéfice maximal ?

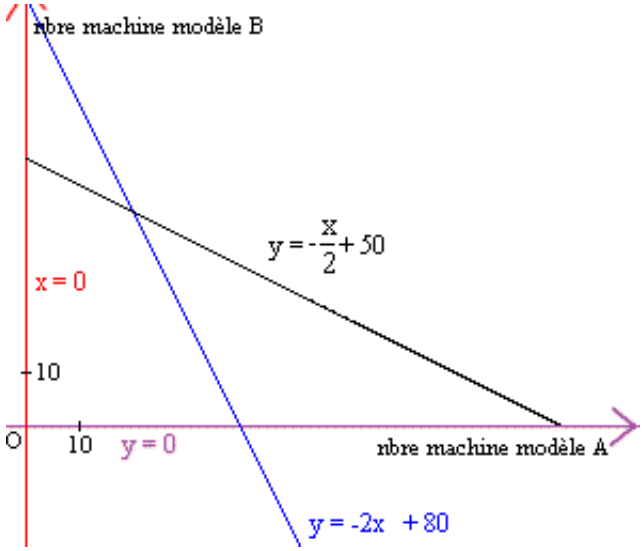
Solution :
Soit x le nombre de machines de modèle A à produire $x \geq 0$
Soit y le nombre de machines de modèle B à produire $y \geq 0$
Comme on dispose de 200 kg de matière première alors on a : $2x+4y \leq 200$
Aussi on dispose de 1200 h de travail donc : $30x+15y \leq 1200$

Le bénéfice est donné par : $b = 7x+6y$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+4y \leq 200 \\ 30x+15y \leq 1200 \end{cases}$$

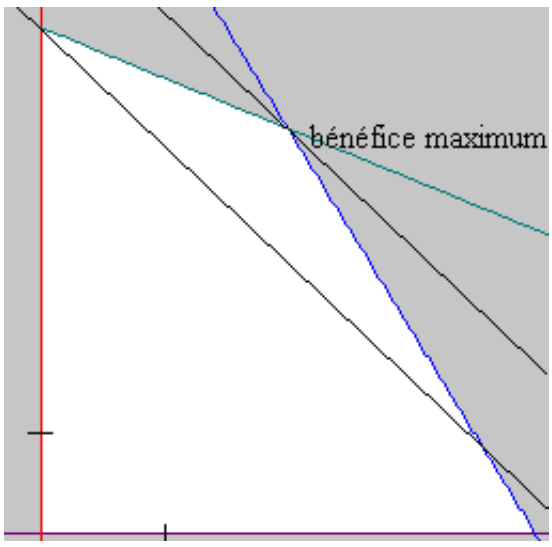
et les couples solutions (x, y)
doivent rendre $b = 7x+6y$ maximum

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{x}{2}+50 \\ y \leq -2x+80 \end{cases}$$



A n'importe quel bénéfice b correspond une droite D d'équation $y = -\frac{7}{6}x+\frac{b}{6}$

Toutes les droites tracées ont même la même pente -(7/6) mais l'ordonnée à l'origine b/6 est variable. Plus haut la droite coupe l'axe des ordonnées plus grand est b/6. (plus grand est donc l'ordonnée à l'origine) . Il s'agit donc de déterminer une droite passant par des points du domaine qui coupe l'axe des ordonnées le plus haut possible.



Il faut déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux droites, si elles sont entière le bénéfice maximum sera atteint pour x et y trouvés

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2}+50 \\ y = -2x+80 \end{cases}$$ on trouve : $x = 20$ et $y = 40$

Le bénéfice maximum est : $b = 7x + 6y = 140 + 240 = 380$ €

N.B. La méthode du simplexe permet de résoudre des systèmes plus grands (programmation linéaire).

[3] **Source http://homeomath.imingo.net/proglin.htm**

Exercices 7 :
Une usine produit deux types de jouets A et B. Le modèle A exige 2 kg de matière première et de 3 heures de fabrication et donne un bénéfice de 27 €. Le modèle B exige 3 kg de matière première et de 6 heures de fabrication et donne un bénéfice de 35 €.
On dispose de 300 kg de matière première et de 2000 h de travail.
Quelle production doit-on avoir pour obtenir un bénéfice maximal ?

Exercices 8 :

Atelier	Découpe	Finition
Temps de fabrication de A	2 heures	3 heures
Temps de fabrication de B	2 heures	1 heure
Capacité maximale de production	200 heures	150 heures
Sachant que les marges unitaires des produits A et B sont respectivement de 20 € et 10 €, quelles seront les quantités à produire pour maximiser le résultat ?		

Exercices 9 [4] **:**
Un fleuriste décide de fabriquer deux types de bouquets. Les bouquets A sont composés de 6 roses, de 3 gerberas et de 2 branches de gypsophile ; les bouquets B sont composés de 4 roses, de 6 gerberas et de 3 branches de gypsophile.
Il rapporte chaque jour des halles 5 cartons de 30 roses chacun, 6 cartons de 18 gerberas et 3 gerbes de 20 branches de gypsophile chacune. Il réalise un bénéfice de 18 F par bouquet A vendu et de 30 F par bouquet B vendu.
On appelle x le nombre de bouquets A et y le nombre de bouquets B vendus par jour.
Déterminer le nombre de bouquets A et le nombre de bouquets B qu'il doit fabriquer par jour pour réaliser un bénéfice maximal, en supposant qu'il vend chaque jour toute sa production.

Exercices 10 :
Un club sportif organise un tournoi. Pendant ce tournoi, il vendra des tasses de café au lait et des tasses de chocolat au lait. Une collecte a permis de réunir 20 litres de lait, 2 kilogrammes de sucre et assez de café et de chocolat pour faire 100 tasses de chaque boisson.
On prévoit de servir 2 sucres par tasse en moyenne; chaque paquet d'un kilogramme de sucre contient 120 morceaux; il faut 1/4 de litre de lait pour une tasse de chocolat et 1/12 de litre de lait pour une tasse de café.
On note x et y les nombres respectifs de tasses de chocolat et de tasses de café au lait qui seront servies pendant le tournoi. Le trésorier du club propose de vendre 5 Fr. chaque tasse de chocolat au lait et 4 Fr. chaque tasse de café au lait. Déterminer la recette maximum.

Exercices 11 :
Une entreprise touristique spécialisée dans la descente d'une rivière de montagne dispose de 25 rafts de deux modèles :

- 10 rafts de type A pouvant transporter chacun 4 touristes au maximum, accompagnés par un moniteur ;
- 15 rafts de types B pouvant transporter chacun 8 touristes au maximum, accompagnés par un moniteur.

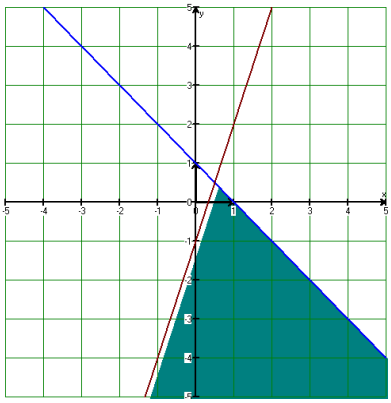
L'entreprise emploie 20 moniteurs.
Si le prix de la location pour une demi-journée est de 200 € pour le type A et 300 € pour le type B, quel est le maximum de bénéfice pour une demi-journée ?

[4] **Source** http://eteaching.free.fr/

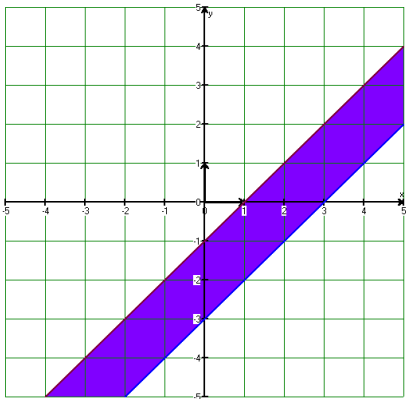
Solutions

Ex 1 :

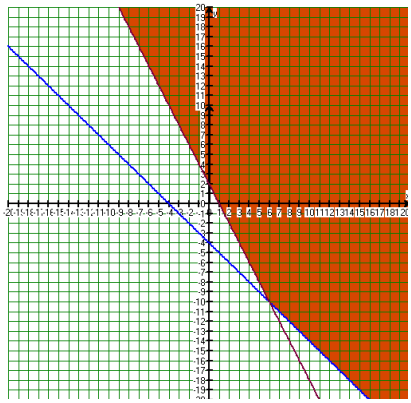
a)



b)

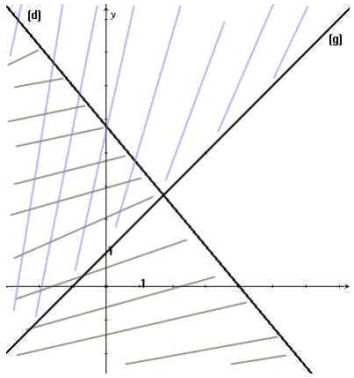


c)



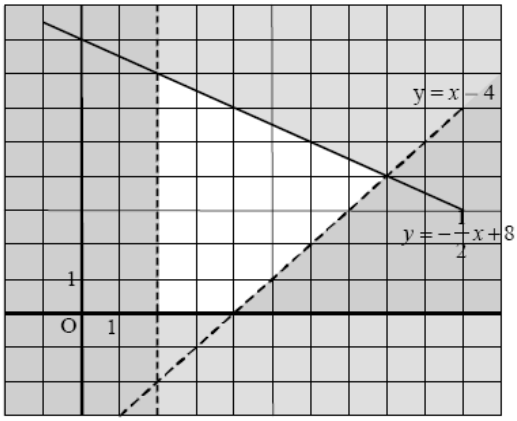
Ex 2 :

a)



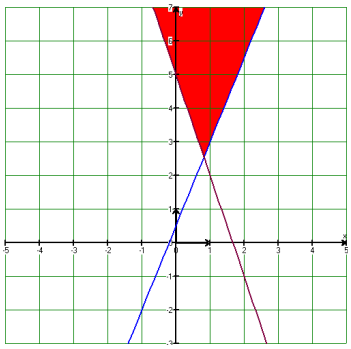
P n'est pas un point solution.

b)

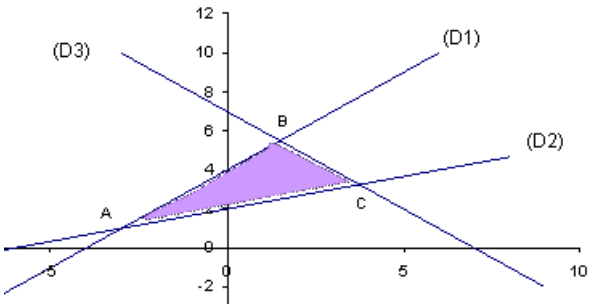


Ex 3 :

a)

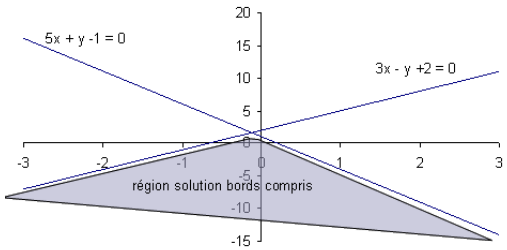


b)



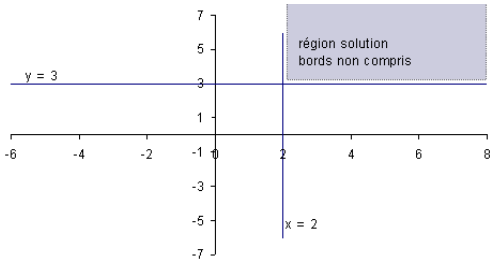
Ex 4 :

a)



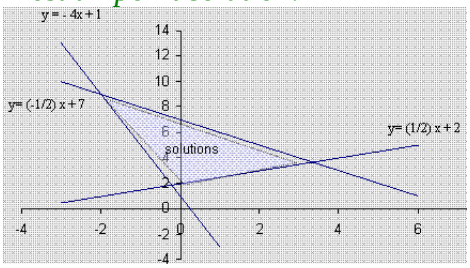
A est un point solution.

b)



B n'est pas un point solution.

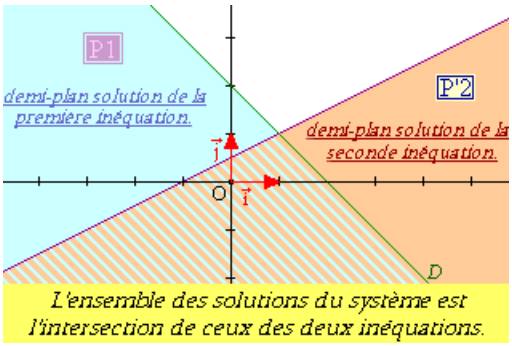
c)



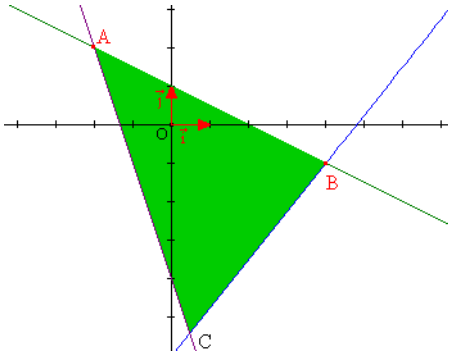
C est un point solution.

Ex 5 :

a)



b)



Ex 6 :

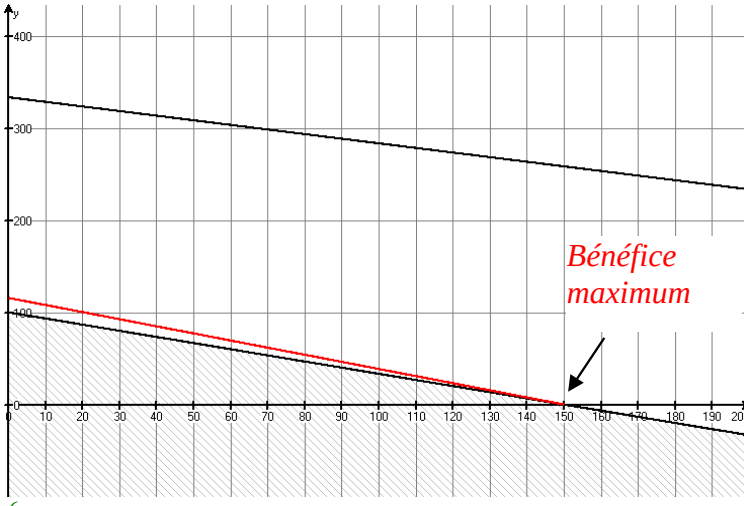
L'intérieur du triangle (ABC) est l'intersection des demi-plans P1, P2 et P3. Celui-ci est solution du système d'inéquations linéaires :

$$\begin{cases} -2x-3y+1<0 \\ 3x-y-7<0 \\ x-4y+5>0 \end{cases}$$

Ex 7 :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+3y \leq 300 \\ 3x+6y \leq 2000 \end{cases}$$

et maximiser $b = 27x+35y$

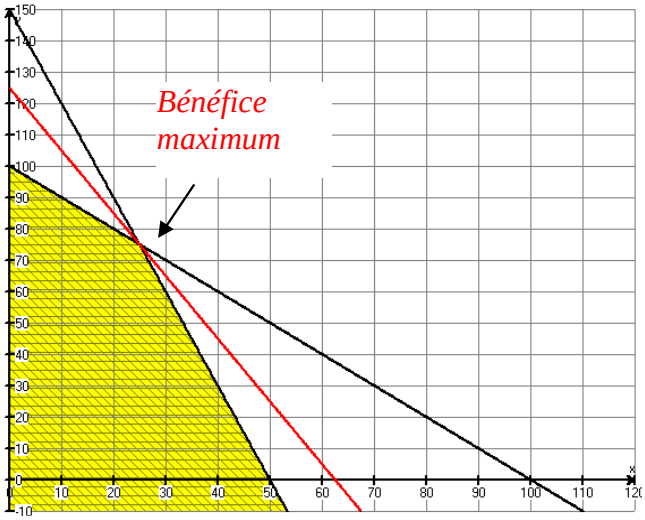


150 jouets A et 0 jouets B donc un bénéfice de 4050 €.

Ex 8 :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+2y \leq 200 \\ 3x+1y \leq 150 \end{cases}$$

et maximiser $b = 20x+10y$

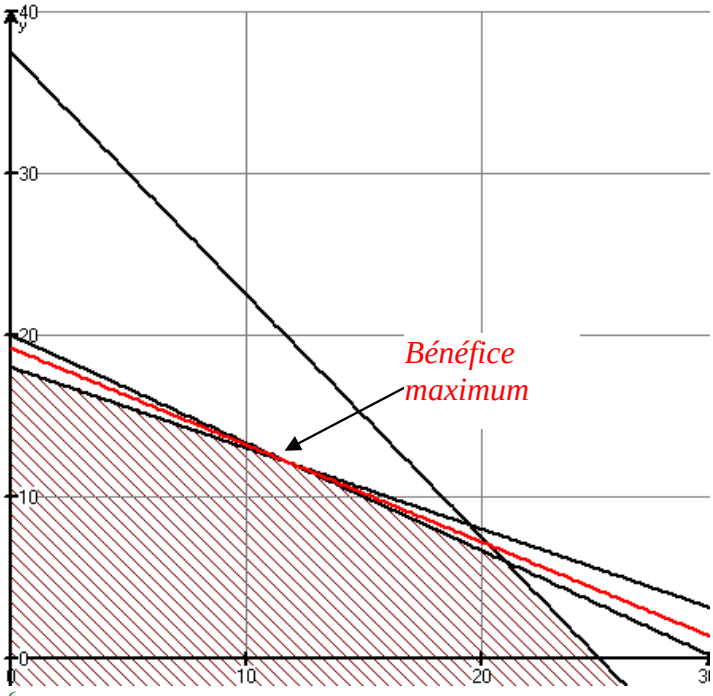


Le programme optimum est 25 A et 75 B pour un résultat de 1'250 euros (25 × 20 € + 75 × 10 €).

Ex 9 :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x+4y \leq 150 \\ 3x+6y \leq 108 \\ 2x+3y \leq 60 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x+2y \leq 75 \\ x+2y \leq 36 \\ 2x+3y \leq 60 \end{cases}$$

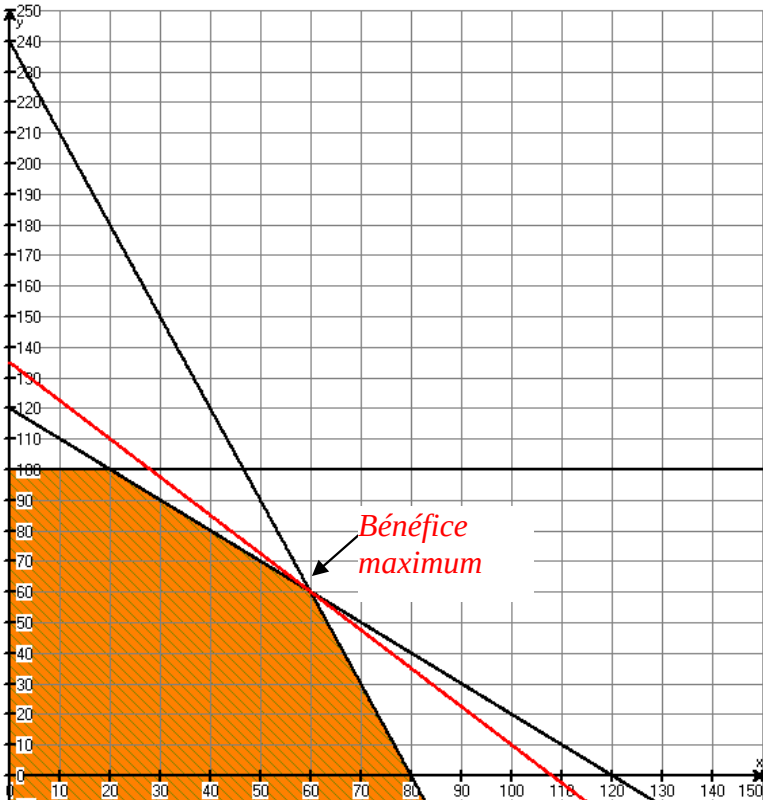
$b = 18x + 30y$



12 bouquets A et 12 bouquets B pour réaliser un bénéfice maximal qui est de 576.-

Ex 10 :

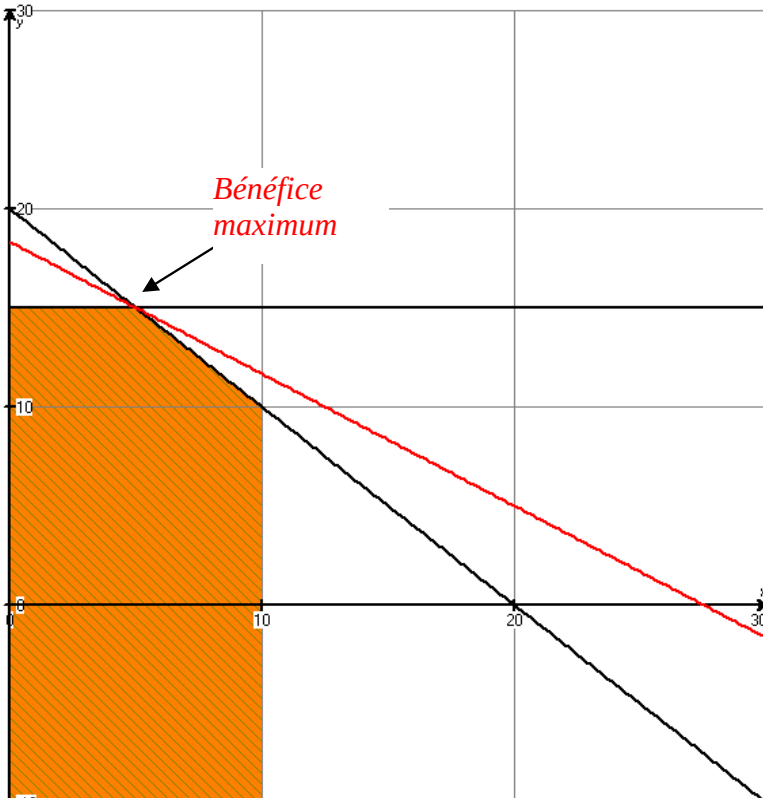
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 100 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ 2x+2y \leq 240 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{12}y \leq 20 \end{cases} \quad \text{et maximiser } b = 5x+4y$$



60 tasses de chocolat au lait et 60 tasses de café au lait.
La recette maximum est de 540.-

Ex 11 :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 15 \\ x + y \le 20 \end{cases} \quad \textit{et maximiser } b = 200x + 300y$$



5 rafts A et 15 rafts B

La recette maximum est de 5'500.- pour une demi-journée.