

**Statistique descriptive– L'écart-type**

**SERIE 3**

La moyenne  $\bar{x}$  (valeur centrale) ne donne pas une idée de la manière dont les valeurs sont distribuées dans son voisinage. Aussi est-il utile d'introduire une mesure pour rendre compte de cette dispersion.

Il donne l'indication de la distance moyenne des échantillons de la valeur moyenne.

Pour des questions théoriques, on introduit la moyenne du carré des écarts qui est :

<p><b><u>La variance statistique</u></b></p> $v = \frac{\sum n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2}{n}$
---

*Grandeur théorique sans unité !*

Pour revenir à l'unité de l'échantillon initial, on définit finalement :

<p><b><u>L'écart type :</u></b></p> $\sigma = \sqrt{v}$
---

Géométriquement on peut caractériser de manière assez générale **l'écart-type comme étant le rayon** (autour de la moyenne) de la « cloche » de la distribution des résultats **englobant environ les 2/3 des données.**  
(dans le cas théorique d'une distribution normale)

Ainsi si on utilise la moyenne pour mesurer la tendance centrale, on lui associera tout naturellement l'écart type pour mesurer la dispersion (par rapport à la moyenne).

Exemple :

25 élèves ont passé un examen et on a relevé :

Note $x_i$	Effectif $n_i$	Note pondérée $n_i x_i$	Fréq. $f_i$	Carré de l'écart $(\bar{x} - x_i)^2$	Carré de l'écart pondéré $n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
1	1				
2	2				
3	5				
4	7				
5	8				
6	2				
	$n = 25$				

$\bar{x} = \dots$

$v = \dots$

$\sigma = \dots$

Solution :

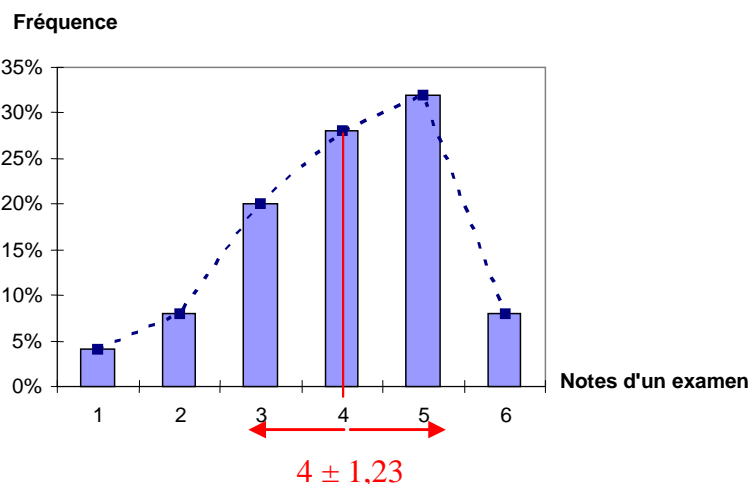
25 élèves ont passé un examen et on a relevé :

Note $x_i$	Effectif $n_i$	Note pondérée $n_i x_i$	Fréq. $f_i$	Carré de l'écart $(\bar{x} - x_i)^2$	Carré de l'écart pondéré $n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
1	1	1	4 %	9	9
2	2	4	8 %	4	8
3	5	15	20 %	1	5
4	7	28	28 %	0	0
5	8	40	32 %	1	8
6	2	12	8 %	4	8
	$n = 25$	100	100 %		38

$$\bar{x} = \frac{100}{25} = 4$$

$$v = \frac{38}{25} = 1,52$$

$$\sigma = \sqrt{1,52} = 1,23$$



*Si l'on suit une loi normale théoriquement 2/3 des notes sont comprises entre 2,77 et 5,23.*

On remarquera dans notre exemple qu'en réalité 20 notes sur 25 soit 80 % sont situées entre 2,77 et 5,23 et que 24 sur 25 soit 96 % sont situées entre 1,54 et 6,46.

**Distribution normale :**

On peut montrer que lorsque la population a une distribution normale alors :

- 68,3 % des valeurs sont situées entre  $\bar{x} - \sigma$  et  $\bar{x} + \sigma$
- 95,4 % des valeurs sont situées entre  $\bar{x} - 2\sigma$  et  $\bar{x} + 2\sigma$
- 99,7 % des valeurs sont situées entre  $\bar{x} - 3\sigma$  et  $\bar{x} + 3\sigma$

## Statistiques Série3

### Exercice 1:

Voici les résultats d'une enquête sur le poids (en kg) des bagages de 25 personnes

35	25	30	25	30
25	20	30	40	35
35	35	30	25	30
35	35	35	30	35
40	30	25	35	40

a) Compléter le tableau suivant :

Bagages kg $x_i$	Effectifs $n_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
20					
25					
30					
35					
40					

- b) Calculer : la moyenne et l'écart type de ces résultats  
 c) Représenter ces résultats à l'aide d'un histogramme  
 d) Indiquer, sur le diagramme, la moyenne et l'écart type

### Exercice 2 :

Tableau qui résume la durée de 50 films

a) Complétez le tableau suivant :

durée (min)	Effectifs $n_i$	$x_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
[100;120[	<b>2</b>					
[120;140[	<b>3</b>					
[140;160[	<b>12</b>					
[160;180[	<b>15</b>					
[180;200[	<b>11</b>					
[200;220[	<b>4</b>					
[220;240[	<b>2</b>					
[240;260[	<b>1</b>					

- b) Calculer : la moyenne et l'écart type de ces résultats  
 c) Représenter ces résultats à l'aide d'un histogramme  
 d) Indiquer, sur le diagramme, la moyenne et l'écart type

**Exercice 3 :**

L'île ALPHA est habitée par 100 personnes, 50 hommes et 50 femmes.  
Tous les hommes chaussent du 42 et toutes les femmes du 34.

- a) Calculer la pointure moyenne des habitants de cette île.
- b) Calculer l'écart type à cette moyenne.

L'île OMEGA est habitée par 100 personnes (aussi!), 50 hommes et 50 femmes.  
Tous les hommes chaussent du 40 et toutes les femmes du 36.

- c) Calculer la pointure moyenne des habitants de cette île.
- d) Calculer l'écart type à cette moyenne.

L'île GAMMA est habitée par 100 personnes (décidément !), 50 hommes et 50 femmes.  
Tous les hommes et toutes les femmes chaussent du 38

- e) Calculer la pointure moyenne des habitants de cette île.
- f) Calculer l'écart type à cette moyenne.
- g) Pour chaque île, représenter graphiquement les données
- h) Expliquer, les conséquences d'un « fort » écart type sur l'allure d'un graphique.
- i) Expliquer l'utilité de l'écart type

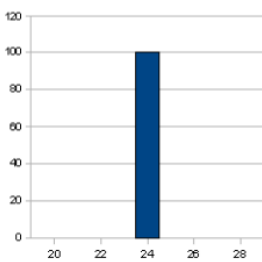
Indications :  
Utiliser le tableau  
ci-contre

Pointure	$n_i$	$n_i \cdot x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$

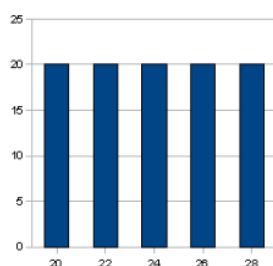
**Exercice 4 :**

Toutes ces statistiques ont la même moyenne (24).  
Pour chaque écart type ci-dessous, retrouvez son diagramme

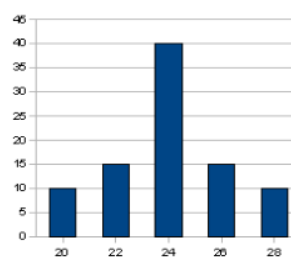
**D1**



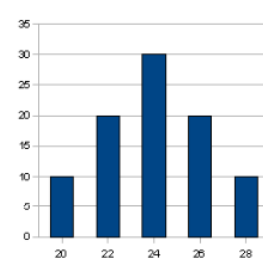
**D2**



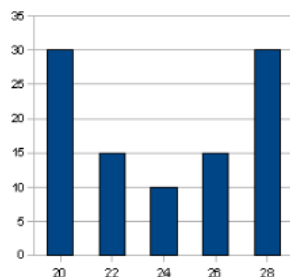
**D3**



**D4**



**D5**

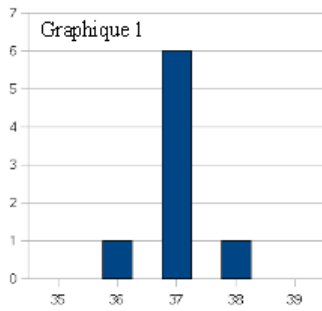


- Écart-Type de : 0
- Écart-Type de : 2.21
- Écart-Type de : 2.31
- Écart-Type de : 2.83
- Écart-Type de : 3.29

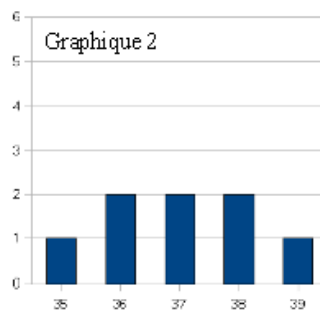
- Diagramme : ....
- Diagramme : ....
- Diagramme : ....
- Diagramme : ....
- Diagramme : ....

**Exercice 5:**

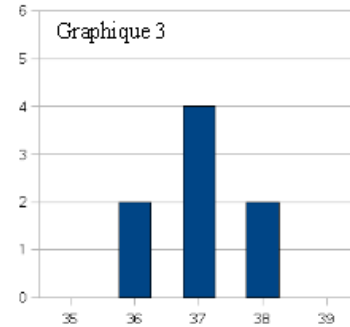
Retrouver, pour chaque graphique, la série de valeurs qui lui correspond



**Valeurs1**  
Moyenne = 37  
Ecart Type = 1,22



**Valeurs2**  
Moyenne = 37  
Ecart Type = 0,5



**Valeurs3**  
Moyenne = 37  
Ecart Type = 0,71

**Exercice 6 :**

Voici les résultats d'une enquête concernant le poids des bagages (en kg) embarqués en soute.

20	19	19	20	20
20	19	21	21	19
22	20	20	18	21
20	20	20	20	20
20	20	20	21	19

a) Compléter le tableau suivant :

Bagages kg $x_i$	Effectifs $n_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
18					
19					
20					
21					
22					

b) Calculer :  $\bar{x}$ ,  $\nu$  et  $\sigma$

c) Représenter ces résultats à l'aide d'un histogramme en indiquant la moyenne et l'écart type

**Exercice 7 : Théorème (König-Huyghens)**  $v = \frac{\sum n_i \cdot x_i^2}{n} - \bar{x}^2$  (pour calculer la variance)

Voici les résultats d'une enquête concernant le poids des bagages (en kg) embarqués en soute.

18	19	20	19	20
20	20	21	19	22
22	18	19	20	21
22	19	21	21	21
19	20	21	22	18

a) Compléter le tableau suivant :

Bagages kg $x_i$	Effectifs $n_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
18				
19				
20				
21				
22				

b) Calculer :  $\bar{x}$ ,  $v$  et  $\sigma$

c) Représenter ces résultats à l'aide d'un histogramme en indiquant la moyenne et l'écart type

**Exercice 8 :**

Voici les résultats d'une enquête concernant la taille de 50 enfants

a) Complétez le tableau suivant :

Taille (cm)	Effectifs $n_i$	$x_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
[70;80[	<b>1</b>				
[80;90[	<b>2</b>				
[90;100[	<b>11</b>				
[100;110[	<b>18</b>				
[110;120[	<b>12</b>				
[120;130[	<b>3</b>				
[130;140[	<b>2</b>				
[140;150[	<b>1</b>				

b) Calculer la moyenne et l'écart type de cette statistique

c) Représenter graphiquement cette statistique en faisant figurer la moyenne et l'écart type

**Exercice 9 : Démontrer le théorème de König-Huyghens**

## Solutions

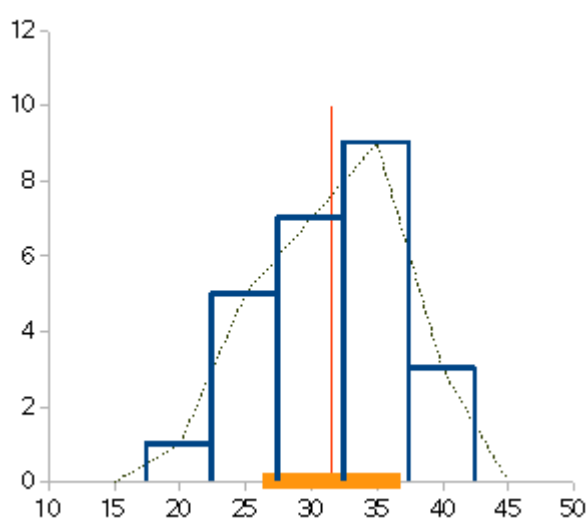
Ex1 :

Bagages kg	Effectifs $n_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
20	1	4.00%	20	134.56	134.56
25	5	20.00%	125	43.56	217.8
30	7	28.00%	210	2.56	17.92
35	9	36.00%	315	11.56	104.04
40	3	12.00%	120	70.56	211.68
	25	100.00%	790		686

$$\bar{x} = 31.6$$

$$v = 27.44$$

$$\sigma = 5.24$$



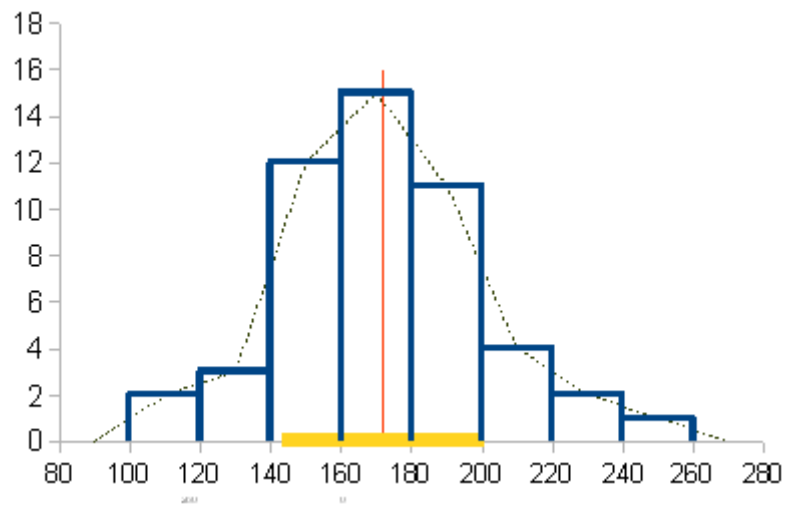
Ex 2 :

durée (min)	Effectifs $n_i$	$x_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
[100;120[	2	110	4.00%	220	3844	7688
[120;140[	3	130	6.00%	390	1764	5292
[140;160[	12	150	24.00%	1800	484	5808
[160;180[	15	170	30.00%	2550	4	60
[180;200[	11	190	22.00%	2090	324	3564
[200;220[	4	210	8.00%	840	1444	5776
[220;240[	2	230	4.00%	460	3364	6728
[240;260[	1	250	2.00%	250	6084	6084
	50		100.00%	8600		41000

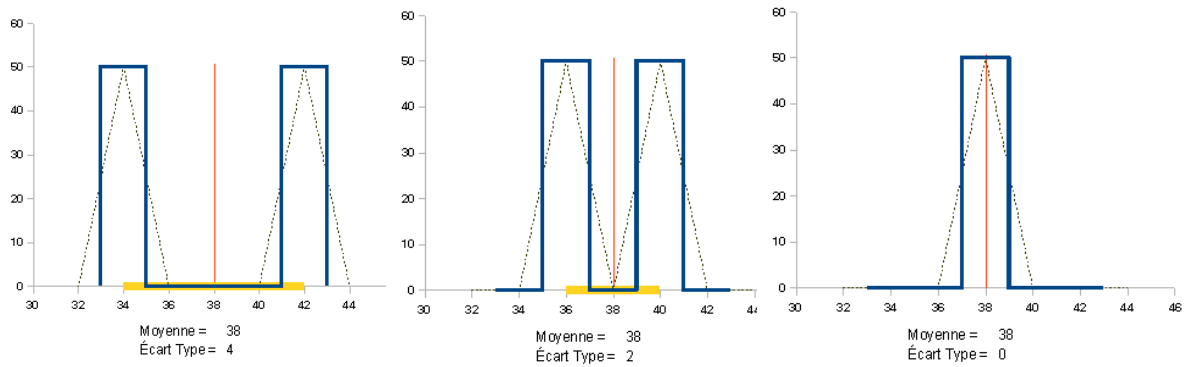
$$\text{Moyenne} = 172$$

$$\text{Variance} = 820$$

$$\text{Écart type} = 28.64$$



Ex3 :



Ex 4 :

Écart-Type de : 0	Diagramme : D1
Écart-Type de : 2.21	Diagramme : D3
Écart-Type de : 2.31	Diagramme : D4
Écart-Type de : 2.83	Diagramme : D2
Écart-Type de : 3.29	Diagramme : D5

Ex5 :            G1-V2            G2-V1            G3-V3



Ex 6 et 7:

Bagages kg	Effectifs $n_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$n_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
18	1	4.00%	18	3.84	3.84
19	5	20.00%	95	0.92	4.61
20	14	56.00%	280	0	0.02
21	4	16.00%	84	1.08	4.33
22	1	4.00%	22	4.16	4.16
	25	100.00%	499		16.96

$\bar{x} = 19.96$

$v = 0.68$

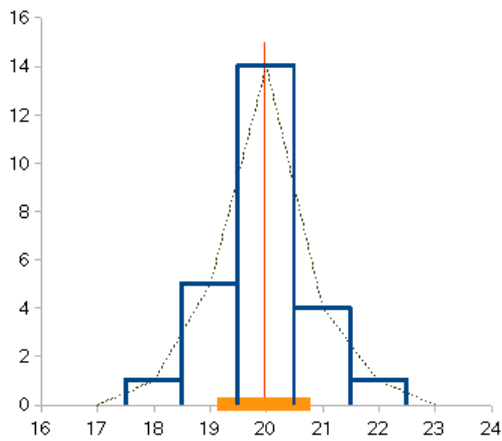
$\sigma = 0.82$

Bagages kg	Effectifs $n_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
18	3	12.00%	54	972
19	6	24.00%	114	2166
20	6	24.00%	120	2400
21	6	24.00%	126	2646
22	4	16.00%	88	1936
	25	100.00%	502	10120

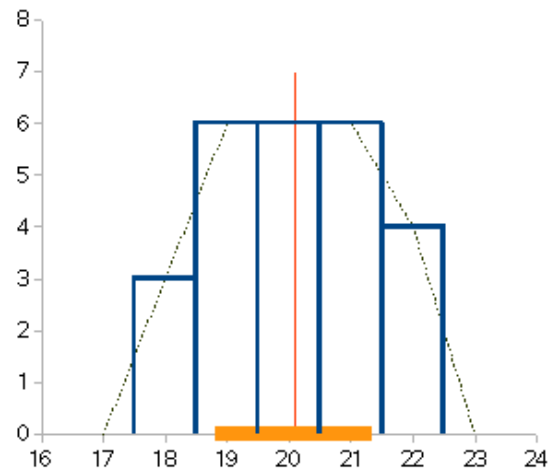
$\bar{x} = 20.08$

$v = 117.71$

$\sigma = 10.85$



Ex 6



Ex 7

Ex8:

durée (cm)	Effectifs $n_i$	$x_i$	Fréquences $f_i$	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
[70;80[	1	75	2.00%	75	5625
[80;90[	2	85	4.00%	170	14450
[90;100[	11	95	22.00%	1045	99275
[100;110[	18	105	36.00%	1890	198450
[110;120[	12	115	24.00%	1380	158700
[120;130[	3	125	6.00%	375	46875
[130;140[	2	135	4.00%	270	36450
[140;150[	1	145	2.00%	145	21025
	50		100.00%	5350	580850

Moyenne = 107

Variance = 168

Écart Type = 12.96

