10. Trigonométrie

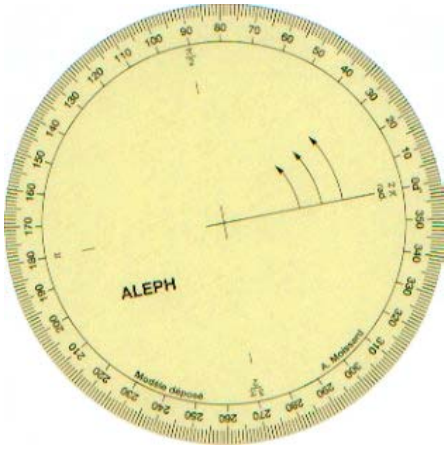
§ 10.1 La mesure de l’angle

Les quatre unités principales de mesure d'un angle géométrique sont le **degré**, le **radian**, le grade et le tour.

Le **degré** peut être utilisé avec deux sous-unités : **minute**, **seconde**.
Une mesure peut donc être un nombre décimal ou un nombre en degré, minute, seconde.

Le degré :
La mesure des angles en degrés correspond au plus ancien des modes de division du cercle. Il consiste à rapporter l’unité d’angle à une unité d’arc qui est la **360ème partie du cercle** :
arc ou angle-unité sont alors dits de un degré et noté **1°**.
Par définition on a:

- Il y a 90 degrés dans un Droit. Ce qui s'écrit: **1D=90°**.
- Il y a 60 **minutes d'angle** dans un degré. Soit: **1°=60'**
  (Il faut remarquer apostrophe qui exprime les minutes d'angle et à ne pas confondre avec une durée).
  Remarque: 1'=1°/60 ou 1/60 de degré
- Il y a 60 **secondes d'angle** dans une minute d'angle : **1'=60"**
  Donc: 1°=60 x 60=3600" (60' valant chacune 60").
  Remarque: 1"=1°/3600 ou 1'/60.



Exemples:
1) **45°20'50"** soit 45·3600 + 20·60 + 50 = 163250"
   La manipulation de ces unités se fait comme avec les unités de durée.
   Aussi : 45°20'50" = 45° + 20/60 + 50/3600 = 45 + 0,333333 + 0,0138 = **45,347°**
2) En général, nous n'utilisons pas les sous multiples du degré (écriture sexagésimale). Nous préférons utiliser une écriture décimale.
   Par exemple: 30,5° ne signifie pas 30° et 5 minutes d'angle mais 30° et 0,5° = 0,5 · 60 = 30'
   finalement: 30,5° = 30°30'

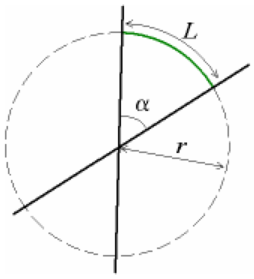
Exercice :
Effectuer les conversions demandées.

a) $37°42' =$ ....°
b) $47,25° =$ ....°.......'......."
c) $120°35'42" =$ ....°
d) $20,32° =$ ....°.......'......."

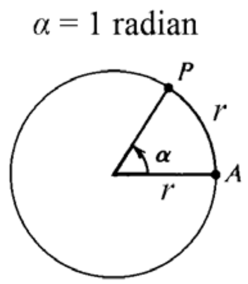
Remarque :
- La navigation maritime à conduit à la mesure en **gradient** où 90° = 100 gr
- Le **tour** utilisé conjointement avec les vitesses angulaire est largement utilisé en mécanique donne que 1 tour = 360°

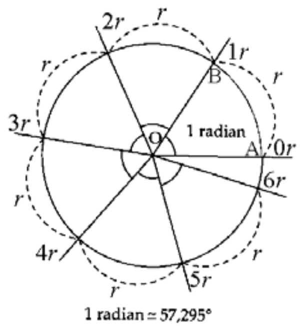
En premier lieu la nécessité du radian est du domaine de **l'analyse** (pour ne citer que les fonctions trigonométriques). Néanmoins en géométrie la mesure des angles en radian simplifie considérablement la relation entre la longueur d'un arc L et l'angle dont il rend la mesure α, en effet un arc représente en effet autant de radian qu'il mesure de rayons.

<u>Le radian</u> :
Un radian, noté rad, est la mesure d'un angle au centre sous-tendu par un arc L égale au rayon du cercle *r*.



$\alpha = \dfrac{L}{r}$





En comptant le nombre de reports qui seraient nécessaires pour couvrir le cercle entier on trouve environ « 6 fois et 1 quart ». Rien d'étonnant, car c'est comme si on cherchait à mesurer la longueur du cercle avec son rayon comme unité. 1 tour = $2\pi r \approx 6{,}28r$

Si on prend le rayon pour unité de longueur on peut alors énoncer que :
« Sur un cercle unité, la mesure de la longueur d'un arc et celle de l'angle qui si rapporte expriment le même nombre. »

Donc : $360° = 2\pi$ rad. 1 rad = $\dfrac{360°}{2\pi} \approx 57{,}3°$

Aussi : $180° = \pi$ rad.

<u>Remarque</u> :

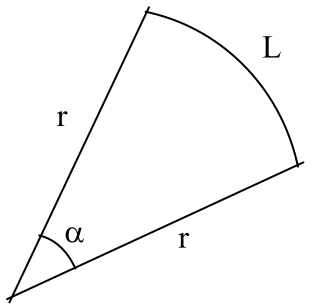
- L'expression d'un angle sans indication d'unité signifie une mesure en radian. La mesure en degré doit être expressément indiquée.
- Il est bien plus commode d'exprimer une mesure en radian par des facteurs de π que par un nombre décimal. Cela donne des divisions rationnelles du cercle.
- Le passage des degrés en radians et réciproquement est un simple exercice de proportion.
  $\dfrac{x\,°}{180°} = \dfrac{y \text{ rad.}}{\pi}$

<u>Exercice</u> :
Compléter le tableau suivant :

Degrés	0°	30°			90°	120°					300°
Radians			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$					π	$\frac{3\pi}{2}$	

17,5°			160°
	1,2	2,1	

<u>Application sur le secteur d'un disque</u> : α en degrés α´ en radians



Aire : $A = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} r^2 \alpha'$

Longueur : $L = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = r \cdot \alpha'$

<u>Vitesses angulaire & vitesse linéaire</u> :

- La vitesse angulaire d'une roue qui tourne à vitesse constante est l'angle généré par unité de temps du segment de droite allant du centre de la roue au point P sur la circonférence.

  $\boxed{\omega = \dfrac{\theta}{t}}$ Elle peut-être exprimée **[rad/s]**, [rad/min], [tours/m], …

- Or la vitesse linéaire d'un point P sur cette même circonférence est la distance « horizontale » ou linéaire parcourue par unité de temps

  $\boxed{v = \dfrac{d}{t}}$ Elle peut-être exprimée **[m/s]**, [km/h], …

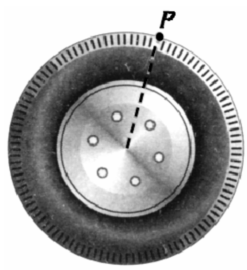
<u>Remarque</u> :

- La fréquence est définie par : $\omega = 2\pi f$
- La vitesse angulaire ne dépend par du diamètre de la roue, il n'en est pas de même de la vitesse linéaire.
- L'utilisation de la longueur d'un segment permet de passer de l'une à l'autre. : $v = \omega \cdot r$

<u>Exercice</u> :

Supposons qu'une roue de voiture de 50 cm de diamètre tourne à la vitesse constante de 1600 tpm.

a) Donner la vitesse angulaire de la roue.

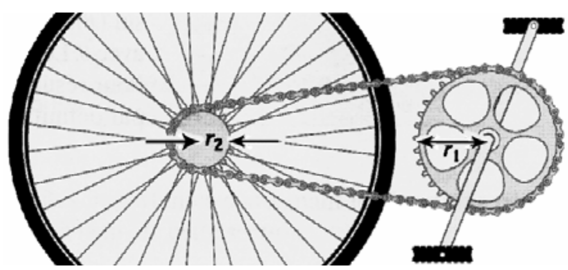


b) Trouver la vitesse linéaire.

<u>Exercice</u>* :

Sur la figure ci-contre on voit la mécanique d'une bicyclette avec $r_1 = 13\,\text{cm}$ et $r_2 = 5$ cm.

Un cycliste expérimenté peut atteindre une vitesse de 64 km/h. Si la roue a un diamètre de 71 cm évaluer la vitesse en tours/min du pignon avant pour atteindre une telle vitesse linéaire.



<u>Indications</u> :

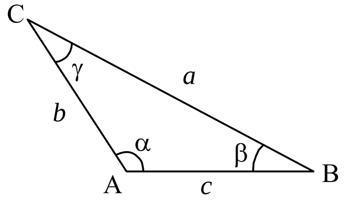
On peut travailler avec θ_1 et θ_2 en radians et rendre compte de leur relation avec r_1 et r_2 .

Aussi convertir les km/h en cm/s peut être plus commode.

§ 10.2 Le triangle quelconque

Le théorème du sinus :

On considère un **triangle quelconque** ABC comme sur la figure ci-dessous.



On a alors les relations suivantes :

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}}$$

Remarques :

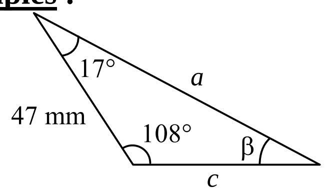
- On peut appliquer le théorème du sinus pour déterminer l'élément manquant d'un triangle quelconque si l'on connaît l'une des combinaisons suivantes :

  1) deux côtés et un angle opposé à l'un d'entre eux (**CCA**)
  2) deux angles[1] et un côté quelconque (**AAC** ou **ACA**)

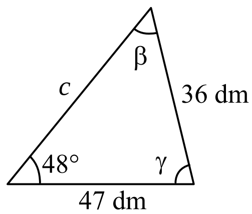
- Dans la section suivante (théorème du cosinus) on pourra résoudre les cas où le théorème du sinus ne peut être utilisé directement à savoir si l'on connaît :
  1) deux côtés et l'angle entre eux (CAC)
  2) trois côtés (CCC)

Exemples :

a)

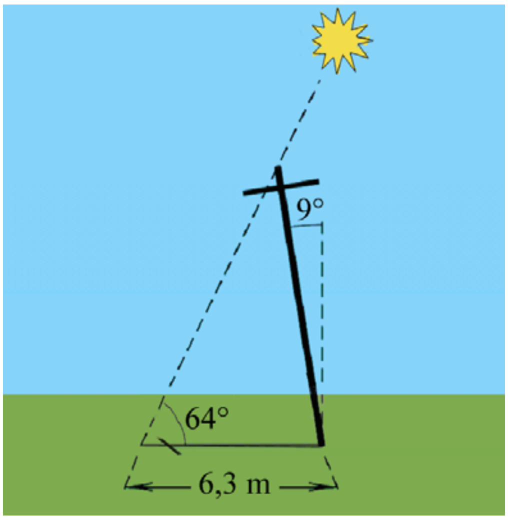


b)



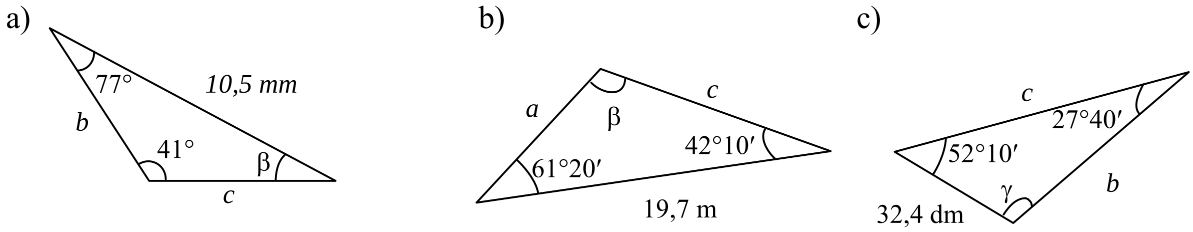
[1] *Rappel : Dans un triangle la connaissance de deux angles détermine le troisième.*

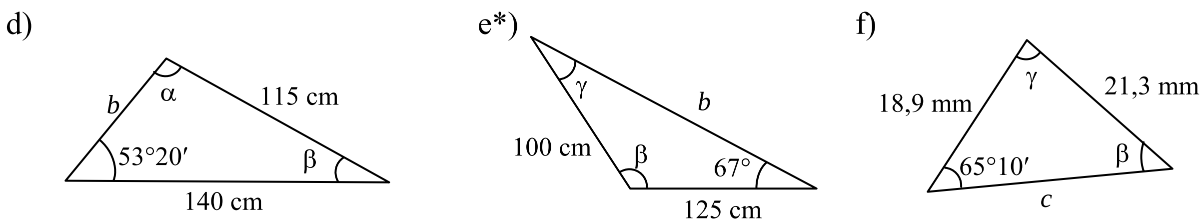
Exemple : *Utilisation d'un angle d'élévation*
Lorsque l'angle d'élévation du soleil est de 64°, un poteau téléphonique qui penche d'un angle de 9° par rapport à une ligne formée par le pied du poteau et le soleil projette une ombre de 6,3 m sur le sol. Calculer la longueur du poteau.



.

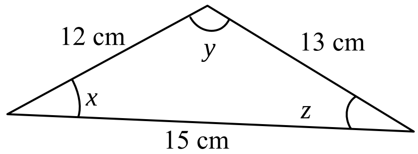
Exercice 1 : Trouver les grandeurs manquantes.



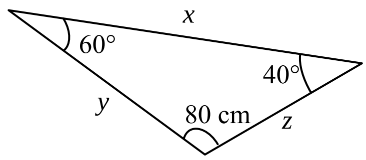


<u>Remarque 1</u> : ***Les limites du théorème du sinus.***
Pour pouvoir applique le **théorème du sinus** à un triangle, il est impératif de connaître la mesure d'un angle et de celle du côté opposé à cet angle. Dans les exemples ci-dessous, le théorème du sinus ne permet pas de calculer les inconnues :

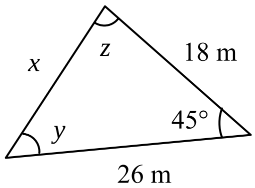
1)



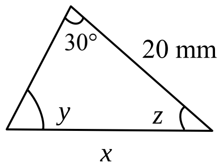
2)



3)

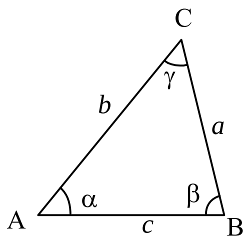


4)



Pour les exemples 1), 2) et 3), on peut résoudre le problème en commençant par appliquer le **théorème du cosinus (voir page 14)**.
Pour l'exemple 4), il manque des données pour résoudre le problème.

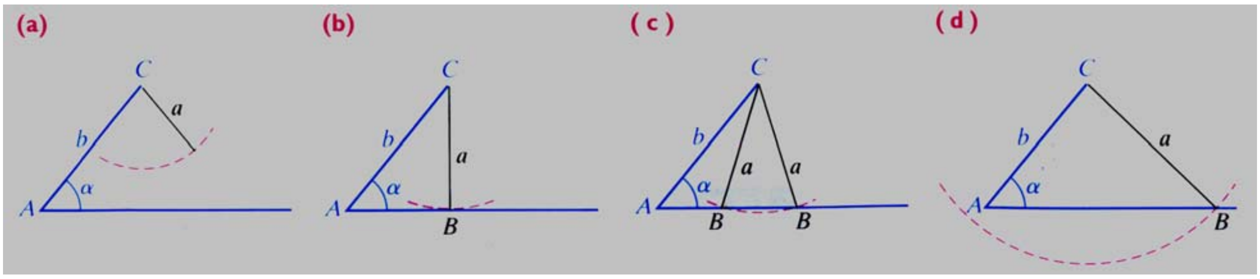
<u>Remarque 2</u> : ***Pas toujours un triangle unique ! Le cas ambigu…***
Si nous connaissons <u>deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux</u> (CCA) cela ne détermine pas toujours un triangle unique.



$\boxed{\text{On suppose donnés : } \alpha \text{ , } \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{a}}$

Considérons que α est aigu : $\alpha < 90°$

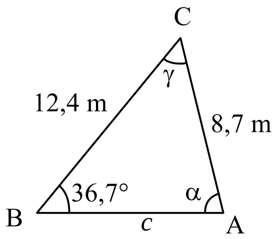
En place α en positions standard et on considère le segment **AC** de longueur ***b*** sur le côté final de α. Le troisième sommet B en fonction de la longueur de ***a*** devrait se situer quelque part sur l'axe horizontal on a alors 4 situations possibles :



- Si on trouve $\sin\beta > 1$ alors il n'existe aucun triangle et on a le cas (a).
- Si on trouve $\sin\beta = 1$ alors $\beta = 90°$ et on a le cas (b).
- Si on trouve $\sin\beta < 1$ on est dans le cas (c) ou (d).

N.B. Si au départ $\alpha > 90°$ un triangle existe si et seulement si $a > b$.

Exemple :
Déterminer les grandeurs manquantes.



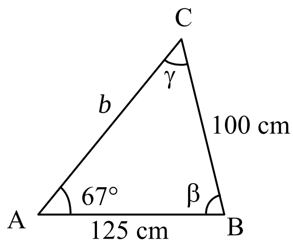
Attention il y a deux possibilités !

α_1 *et* $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$

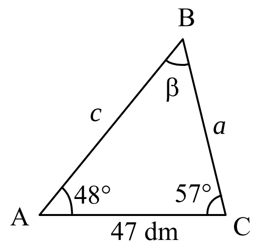
N.B. $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$

Exercice 2 :
Trouver les grandeurs manquantes.

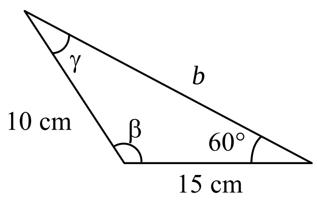
a)



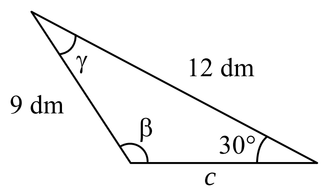
b)



d)

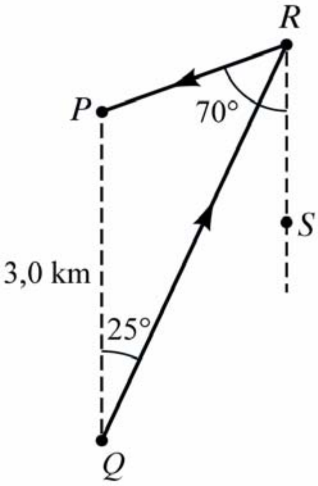


e)



Exercice 3 : **Utilisation de relèvements**

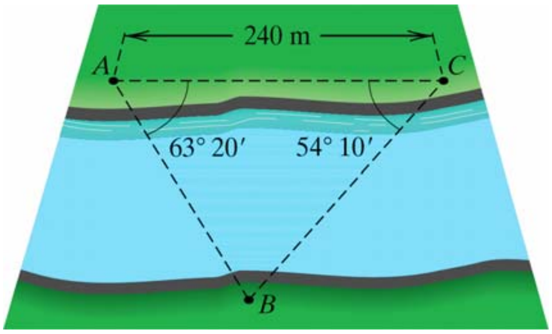
Un point P au niveau du sol se trouve à 3,0 kilomètres au nord d'un point Q. Un coureur, partant de Q, se déplace vers le point R dans la direction N25°E, puis de R vers P dans la direction S70°W. Calculer la distance parcourue.



Exercice 4 : **Topographie**

Pour calculer la distance séparant deux points *A* et *B* situés sur les rives opposées d'un fleuve, un géomètre définit un segment de droite *AC* de 240 m le long d'une des rives. Il détermine que les mesures des angles $\angle BAC$ et $\angle ACB$ sont respectivement de 63°20′ et 54°10′.

a) Calculer la distance entre A et B.
b) Calculer la largeur du fleuve si A,B et C sont à 5 m du bord.

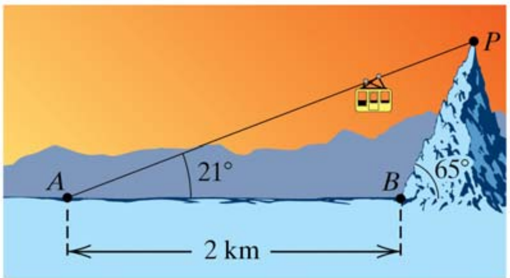


Exercice 5 : ***Hauteur d'une montagne***

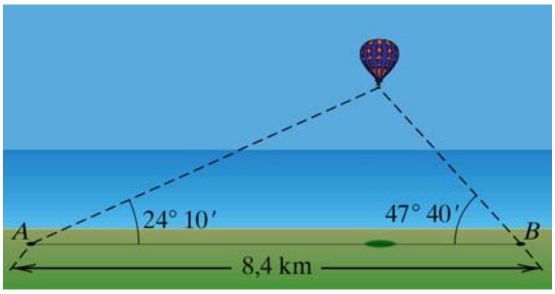
Refaire l'exercice 7 en utilisant le théorème du sinus.

<u>Exercice 6</u> : Topographie
Pour déterminer la distance séparant deux points *A* et *B*, un géomètre choisit un point *C* qui se situe à 375 m de *A* et à 530 m de *B*. Si ∠BAC mesure 49°30′, calculer la distance entre *A* et *B*.

<u>Exercice 7</u> : Téléphérique
La figure représente un téléphérique transportant des passagers d'un point *A*, qui se trouve à 2 km du point *B* situé au pied de la montagne, à un point *P* au sommet de la montagne. Les angles d'élévation de P aux points *A* et *B* sont respectivement de 21° et 65°.
a) Calculer la distance entre *A* et *P*.
b) Calculer la hauteur de la montagne.

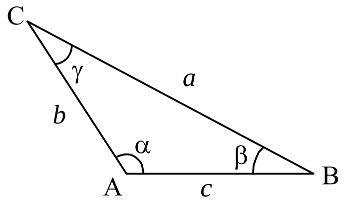


<u>Exercice 8</u> : Altitude d'un ballon à air chaud
Les angles d'élévation d'un ballon à partir de deux points au sol sont respectivement de 24°10′ et 47°40′. Comme le montre la figure, les points A et B sont distants de 8,4 km et le ballon se situe entre ces points, dans un même plan vertical. Calculer l'altitude du ballon.



Le théorème du cosinus :

On considère un **triangle quelconque** ABC comme sur la figure ci-dessous.



On a alors les relations suivantes :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

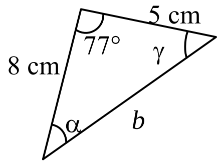
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Remarques :

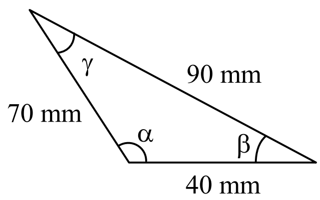
- Si $\alpha = 90°$ on retrouve le théorème de Pythagore.
- Le théorème du cosinus permet de résoudre les cas où le théorème du sinus ne peut être utilisé directement. On détermine l'élément manquant d'un triangle quelconque si l'on connaît l'une des combinaison suivantes :
    1) deux côtés et l'angle entre eux (CAC)
    2) trois côtés (CCC)

Exemples :

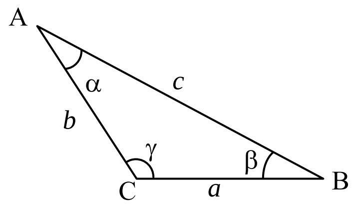
a)



b)



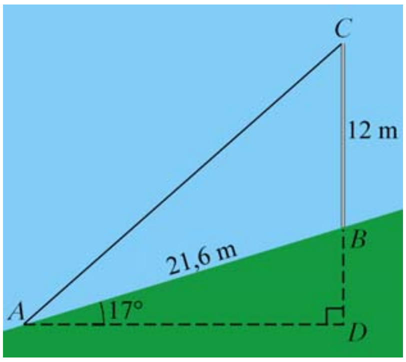
Exercice 9 : Dans chaque cas trouver les grandeurs manquantes.



1)	$\alpha = 60°$	$b = 20$	$c = 30$
2)	$\beta = 150°$	$a = 150$	$c = 30$
3)	$\gamma = 115°10'$	$a = 1{,}1$	$b = 2{,}1$
4)	$a = 2{,}0$	$b = 3{,}0$	$c = 4{,}0$
5)	$a = 25$	$b = 80$	$c = 60$

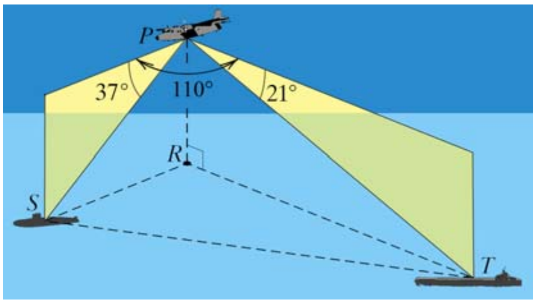
Exercice 10 :
Un parallélogramme a des côtés de 30 cm et de 70 cm et un angle de 65°.
Calculer la longueur de chaque diagonale au centimètre près.

<u>Exercice 11</u> : Calcul de la longueur d'un câble
Un poteau haut de 12 m est planté sur le flanc d'une colline qui forme un angle de 17° avec l'horizontale. Calculer la longueur minimale d'un câble tendu entre le sommet du poteau et un point en contrebas distant de 21,6 m de la base du poteau.



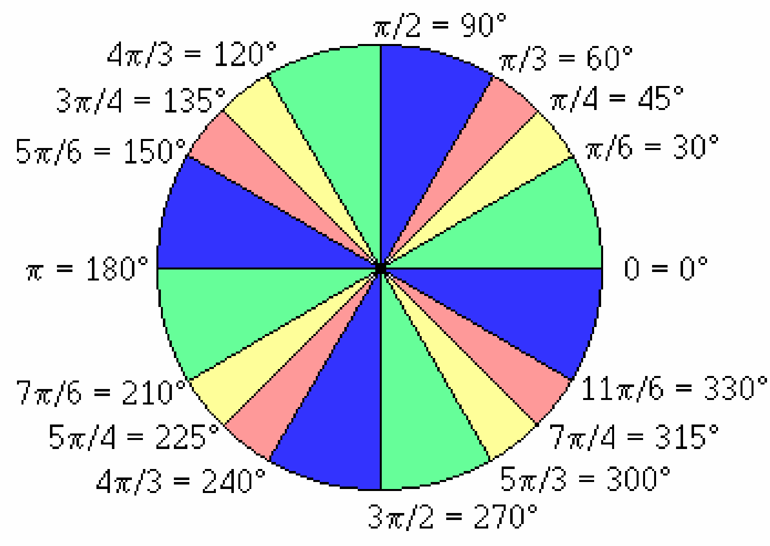
<u>Exercice 12</u> : Distance entre deux voitures
Deux voitures quittent une ville en même temps et suivent chacune une autoroute rectiligne, dont les directions diffèrent de 84°. Si les vitesses des deux voitures sont respectivement de 90 km/h et de 72 km/h, calculer la distance séparant les deux véhicules au bout de 20 minutes.

<u>Exercice 13</u> : Avion de reconnaissance
Un avion de reconnaissance *P*, volant à 3000 m au-dessus d'un point *R* à la surface de l'eau, détecte un sous-marin *S* avec un angle de dépression de 37° et un bateau de ravitaillement *T* avec un angle de dépression de 21°, comme le montre la figure. De plus, $\angle SPT$ est mesuré à 110°. Calculer la distance entre le sous-marin et le bateau de ravitaillement.



Solutions

Page 2 :



Page 3 : Exemple : a) 167,5 rad/s b) 150,8 km/h

Exercice : 184 tours/min

Ex 1 :
- a) $\beta = 62°$ — $b = 14{,}1$ mm — $c = 15{,}6$ m
- b) $\beta = 76°30'$ — $a = 13{,}6$ m — $c = 17{,}8$ m
- c) $\gamma = 100°10'$ — $b = 55{,}1$ dm — $c = 68{,}7$ dm
- d) $\alpha = 77°30'$ — $\beta = 49°10'$ — $b = 108$ cm
  $\alpha = 102°30'$ — $\beta = 24°10'$ — $b = 59$ cm
- e) impossible un tel triangle n'existe pas !
- f) $\beta = 53°40'$ — $\gamma = 61°10'$ — $c = 20{,}6$ mm

Exemple: Cas 1 : $\alpha = 58{,}4°$; $\gamma = 84{,}9°$; $c = 14{,}5$ m
Cas 2 : $\alpha = 121{,}6°$; $\gamma = 21{,}7°$; $c = 5{,}4$ m

Ex 2 : a) Ce triangle ne peut être construit. b) $a = 36$ dm ; $c = 41$ dm
c) Ce triangle ne peut être construit. d) 2 solutions : …

Ex 3 : 5,8 km

Ex 4 : a) 219 m b) 186,02 m

Ex 5 : 1884,19 m

Ex 6 : 690,30 m

Ex 7 : a) 2,6 km b) 935 m

Ex 8 : 2,68 km

Ex 9 : 1)	$a = 26{,}45$	$\beta = 40{,}90°$	$\gamma = 79{,}10°$
2)	$b = 176{,}62$	$\alpha = 25{,}12°$	$\gamma = 4{,}87°$
3)	$c = 2{,}75$	$\alpha = 21{,}16° = 21°10'$	$\beta = 43°40'$
4)	$\alpha = 28{,}96°$	$\beta = 75{,}56°$	$\gamma = 75{,}48°$
5)	$\alpha = 12°24'$	$\beta = 136°30'$	$\gamma = 31°6'$

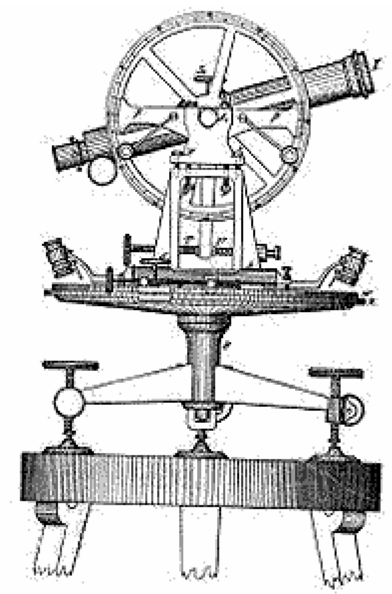
Ex 10 : 63 cm et 87 cm

Ex 11 : 27,6 m

Ex 12 : 36,4 km

Ex 13 : Avec 3981 m et 7815 m on trouve 9910 m $\approx$ 9,9 km

Source des exercices : « Trigonométrie avec géométrie analytique » , E.W. Swokowski , J.A. Cole



Un ancien télescope d'arpenteur