

Statistique descriptive– La médiane

SERIE N° 4

L'inconvénient majeur de la moyenne est sa sensibilité aux valeurs extrêmes. Un autre indicateur important, cette fois insensible aux valeurs extrêmes, est :

La médiane

La médiane \tilde{x} est une valeur telle que la moitié des valeurs x_i de l'échantillon lui sont inférieures ou égales et l'autre moitié supérieures ou égales.

La **médiane** est la valeur qui sépare la population en deux groupes égaux. C'est à dire que 50% de la population est au dessous de la médiane et l'autre 50% est au dessus.

a) La médiane pour un échantillon discret

Dans le cas d'un échantillon discret de n valeurs de x_i rangées dans l'ordre croissant :

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ la **médiane** \tilde{x} est la valeur du milieu.

Si n impair alors $\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$ si n pair alors $\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ (moyenne des deux valeurs centrales)

Exemple 1 : Voici six salaires mensuels :

3'500.- 4'200.- 4'600.- 5'000.- 6'200.- 36'500.-

La moyenne est : $\bar{x} = 10'000.$ – Frs.

Alors que la médiane est : $\tilde{x} = \frac{4600 + 5000}{2} = 4'800$

Remarque:

La médiane n'est pas affectée pas les valeurs extrêmes de la distribution.

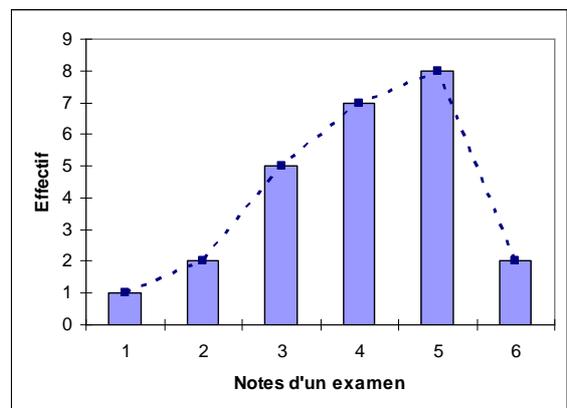
Dans les distributions asymétriques la médiane donne une idée plus « équilibrée » de la tendance centrale.

Exemple 2 :

25 élèves ont passé un examen et on a relevé :

Note	Effectif	Fréquence
x_i	n_i	f_i
1	1	4 %
2	2	8 %
3	5	20 %
4	7	28 %
5	8	32 %
6	2	8 %

1,2,2,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,6,6



La médiane vaut 4 car c'est la 13^{ème} note sur les 25.

$\tilde{x} = 4$

b) La médiane pour un échantillon continu

Dans le cas d'un échantillon continu pour estimer la *médiane* il faut passer par la *fonction cumul* (cumul des %). La médiane sera alors la valeur de x pour laquelle la fonction vaut 50%

Les fréquences relatives sont : $f_i = \frac{n_i}{n}$ $i = 1, 2, \dots, k$

Fréquences cumulées (fonction cumul) :

Pour connaître la proportion $F(x)$ (dite fréquence cumulée) des individus qui présentent des valeurs x_i du caractère inférieur ou égale à x , on additionne toutes les fréquences f_i qui correspondent aux x_i tels que $x_i < x$.

On détermine par le graphique de $F(x)$ facilement la médiane car $F(\tilde{x}) = 50\%$

Exemple 3 :

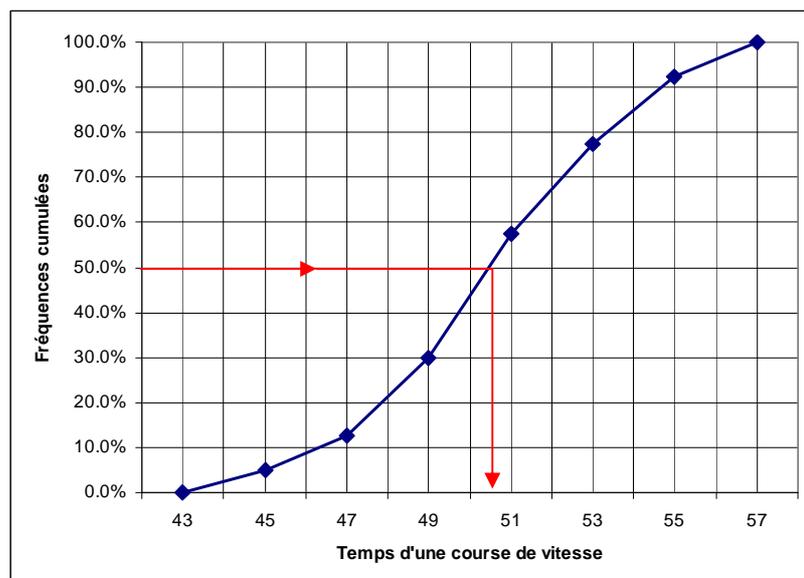
Lors d'une course de vitesse les 40 participants ont mis les temps suivants pour effectuer le parcours

Temps (secondes)	Centre x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée $f_i x_i$
[43-45[44	2	5,0 %	5,0 %
[45-47[46	3	7,5 %	12,5 %
[47-49[48	7	17,5 %	30,0 %
[49-51[50	11	27,5 %	57,5 %
[51-53[52	8	20,0 %	77,5 %
[53-55[54	6	15,0 %	92,5 %
[55-57[56	3	7,5 %	100,0 %

Temps	Fréquences cumulées
43	0.0%
45	5.0%
47	12.5%
49	30.0%
51	57.5%
53	77.5%
55	92.5%
57	100.0%

La médiane vaut :

$$\tilde{x} = 50,5$$



Statistiques Série 4

Exercice 1 : Pour chaque série ci-dessous, déterminer sa médiane.

- a) 1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6,8,100,110
- b) 1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6,8,100,110,200
- c) 1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6,8,100,110,50000
- d) 1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6,8,100,11000,500000

Exercice 2 : Pour chaque série ci-dessous, calculer sa moyenne.

- a) 1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6,8,100,110
- b) 1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6,8,100,110,200
- c) 1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6,8,100,110,50000
- d) 1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6,8,100,11000,500000

Exercice 3 : Déterminer la médiane de chaque statistique.

Note	Effectif	Effectif cumulé
1	1	
2	2	
3	3	
4	6	
5	4	
6	1	
	17	

Note	Effectif	Effectif cumulé
1	1	
2	2	
3	6	
4	3	
5	4	
6	1	
	17	

Note	Effectif	Effectif cumulé
1	1	
2	2	
3	6	
4	3	
5	4	
6	2	
	18	

Exercice 4: (cas avec une valeur extrême)

L'entreprise de Giles Baytes est composée de 17 personnes.
Ci-dessous, la paye mensuelle de chaque employé (en U)

2000 U 3000 U 2000 U 2000 U 2000 U
2000 U 1000 U 1000 U 100000 U
1000 U 3000 U 1000 U 3000 U
2000 U 2000 U 1000 U 3000 U

- a) classer ces résultats dans l'ordre croissant
- b) calculer leur moyenne
- c) calculer leur médiane
- d) représenter ces résultats sur un diagramme à bande
- e) indiquer la moyenne et la médiane

Exercice 5 :(cas sans valeur extrême)

L'entreprise *Equity* est composée de 17 personnes.
Ci-dessous, la paye mensuelle de chaque employé (en U)

2000 U 1000 U 1000 U 3000 U 3000 U
 1000 U 2000 U 2000 U 2000 U
 1000 U 1000 U 3000 U 2000 U
 3000 U 1000 U 1000 U 3000 U

- classer ces résultats dans l'ordre croissant
- calculer leur moyenne
- calculer leur médiane
- représenter ces résultats sur un diagramme à bande
- indiquer la moyenne et la médiane

Exercice 6 : (Cas continu)

Tableau qui résume la durée de 50 films:

durée (min)	Effectifs n_i	x_i	Fréquences f_i	Fréquences cumulées
[100;120[2	110	4.00%	
[120;140[3	130	6.00%	
[140;160[12	150	24.00%	
[160;180[15	170	30.00%	
[180;200[11	190	22.00%	
[200;220[4	210	8.00%	
[220;240[2	230	4.00%	
[240;260[1	250	2.00%	
	50		100.00%	

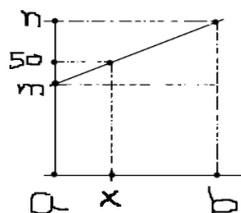
- Compléter la colonne des fréquences cumulées.
- Représenter graphiquement les fréquences cumulées
- Déterminer, à l'aide du graphique, la médiane de cette statistique.

Exercice 7*

trouver une méthode algébrique
qui permette de calculer la médiane
du tableau ci-contre.

durée (min)	Fréquences cumulées
120	4.00%
140	10.00%
160	34.00%
180	64.00%
200	86.00%
220	94.00%
240	98.00%
260	100.00%

Indications :



et théorème de Thalès

Série 4

Exercice 8 :

L'étude de la taille des élèves d'une classe a donné les résultats suivants :

Taille (cm)	Effectif
[140 ; 150 [1
[150 ; 160 [5
[160 ; 170 [7
[170 ; 180 [6
[180 ; 190 [4

Faire l'étude complète de ce caractère :
fréquences, moyenne, mode, histogramme
et médiane

Exercice 9 :

L'étude de l'âge des habitants d'un immeuble a donné les résultats suivants :

Âge	effectif
[0 ; 18 [20
[18 ; 36 [36
[36 ; 54 [20
[54 ; 72 [15
[72 ; 90 [9

Faire l'étude complète de ce caractère :
fréquences, moyenne, mode, histogramme
et médiane

Solutions :

Ex1 et 2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	6	8	100	110

Médiane = 4
Moyenne = 14.47

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	6	8	100	110	200

Médiane = 4.5
Moyenne = 23.75

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	6	8	100	110	50000

Médiane = 4.5
Moyenne = 2513.75

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	6	8	100	11000	500000

Médiane = 4.5
Moyenne = 25558.25

La médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes !!!

Ex 3 :

Note	Effectif	Eff. Cum.
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	6	12
5	4	16
6	1	17
	17	

La médiane (9ème valeur)
vaut 4

Note	Effectif	Eff. Cum.
1	1	1
2	2	3
3	6	9
4	3	12
5	4	16
6	1	17
	17	

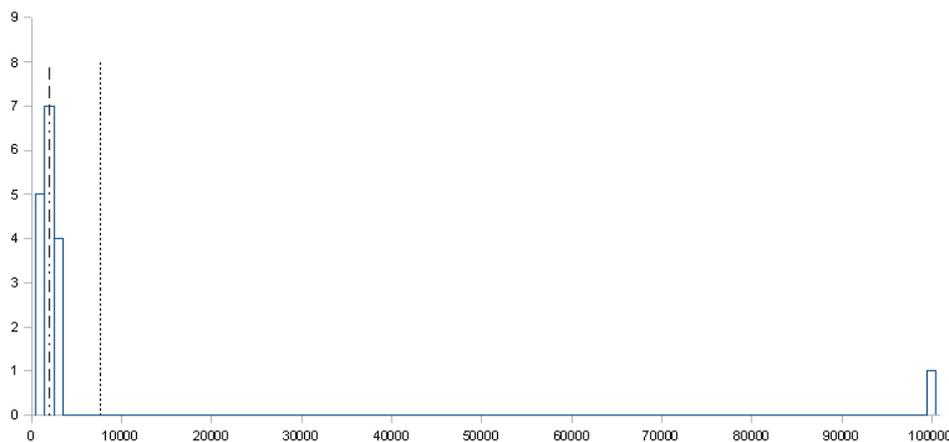
La médiane (9ème valeur)
vaut 3

Note	Effectif	Eff. Cum.
1	1	1
2	2	3
3	6	9
4	3	12
5	4	16
6	2	18
	18	

La médiane (entre la 9ème et 10ème valeur)
vaut 3,5

Ex 4 :

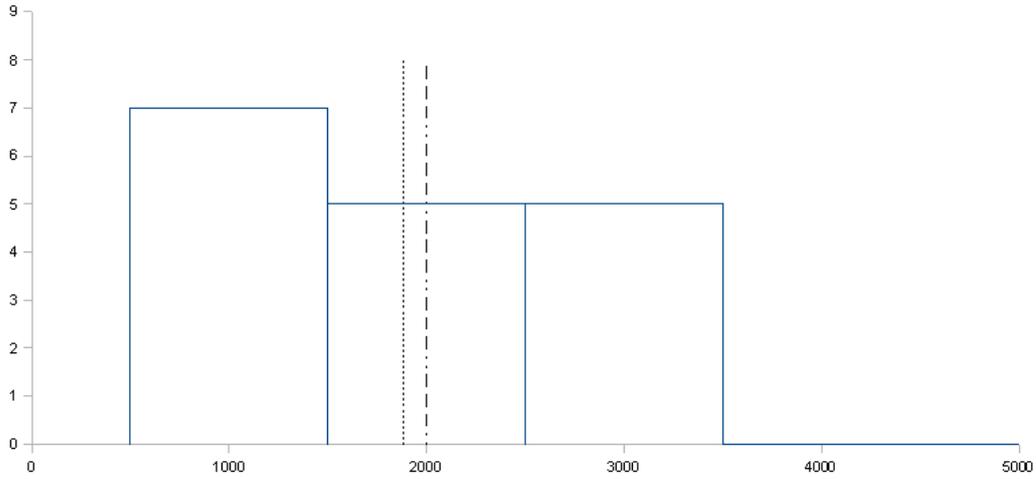
V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17
1000	1000	1000	1000	1000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	3000	3000	3000	3000	100000



moyenne = 7706 U
Médiane = 2000 U

Ex5 :

V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	2000	2000	2000	2000	2000	3000	3000	3000	3000	3000



moyenne= 1882 U
Médiane = 2000 U

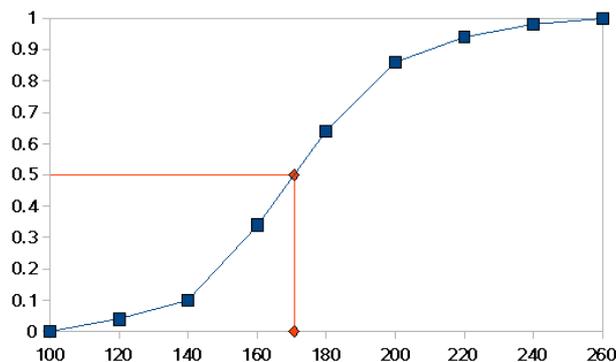
Ex6 :

durée (min)	Effectifs n_i	x_i	Fréquences f_i	Fréquences cumulées	durée (min)
[100;120[2	110	4.00%	4.00%	120
[120;140[3	130	6.00%	10.00%	140
[140;160[12	150	24.00%	34.00%	160
[160;180[15	170	30.00%	64.00%	180
[180;200[11	190	22.00%	86.00%	200
[200;220[4	210	8.00%	94.00%	220
[220;240[2	230	4.00%	98.00%	240
[240;260[1	250	2.00%	100.00%	260
	50		1		

a= 160
b= 180

m= 34
n= 64

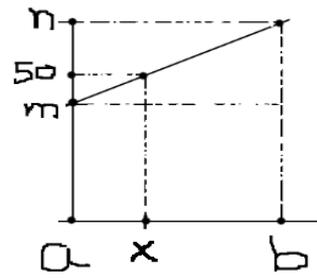
Médiane = 170.67



Ex 7 :

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{50-m}{n-m}$$

Avec $a = 160$
 $b = 180$
 $m = 34\%$
 $n = 64\%$



On trouve $x = \text{médiane} = 170,67$

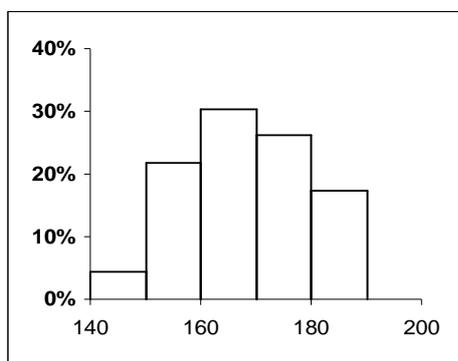
SOLUTIONS

Exercice 8 :

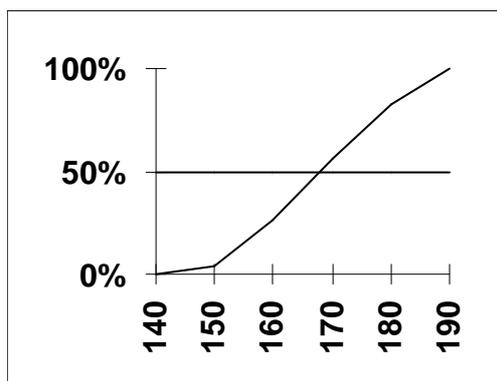
Centres	Taille (cm)	effectif	fréquences	Cumul	produit
145	[140 ; 150 [1	4.3%	4.3%	145
155	[150 ; 160 [5	21.7%	26.1%	775
165	[160 ; 170 [7	30.4%	56.5%	1155
175	[170 ; 180 [6	26.1%	82.6%	1050
185	[180 ; 190 [4	17.4%	100.0%	740
		23	100.0%		3865

moyenne = 168.04 cm

mode = [160;170[



Histogramme

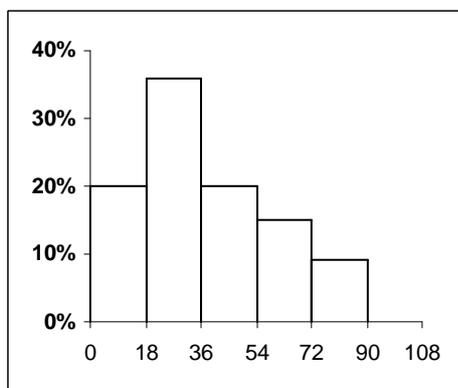


Fonction cumulée médiane = 168

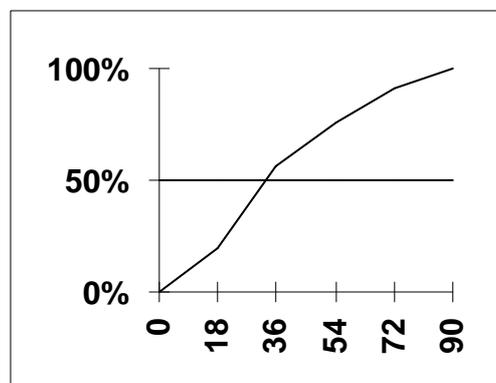
Exercice 9 :

Centres	âges	effectif	fréquences	Cumul	produit
9	[0 ; 18 [20	20.0%	20.0%	180
27	[18 ; 36 [36	36.0%	56.0%	972
45	[36 ; 54 [20	20.0%	76.0%	900
63	[54 ; 72 [15	15.0%	91.0%	945
81	[72 ; 90 [9	9.0%	100.0%	729
		100	100.0%		3726

Moyenne = 37.26 ans mode = [18;36[



Histogramme



fonction cumulée médiane = 33 ans